

UNIVERSITA' TELEMATICA "e-Campus"

Facoltà di Scienze Pedagogiche



Leibniz: Il calcolo infinitesimale e la musica

Relatore:

Chiarissimo Prof.: Lorenzo Leonardo Pizzichemi

Candidato:

Raffaele Cardone

Matricola: 004644971

Anno Accademico

2023/2024

A Maria, insieme navigando.

Indice	2
Prefazione	4
1. Introduzione	6
1.1 Contesto storico e biografico di Gottfried Wilhelm Leibniz	6
1.2 Obiettivi e metodologia della ricerca	8
2. Il calcolo infinitesimale di Leibniz	10
2.1 Genesi e sviluppo del calcolo leibniziano	13
2.2 La notazione differenziale e il suo impatto	17
2.3 Applicazioni e implicazioni filosofiche del calcolo	22
3. Leibniz e la musica	22
3.1 L'interesse di Leibniz per la teoria musicale	27
3.2 La musica come espressione dell'armonia universale	38
3.3 Influenze della musica sul pensiero matematico di Leibniz	46
4. Intersezioni tra calcolo infinitesimale e musica	49
4.1 Analogie strutturali tra calcolo e armonia musicale	51
4.2 Il concetto di continuità nel calcolo e nella musica	53
4.3 La ricerca dell'infinito: convergenze matematiche e musicali	55
5. La visione unificata di Leibniz	57
5.1 La "caratteristica universale" e il suo rapporto con calcolo e musica	57
5.2 L'armonia prestabilita come principio unificatore	58
5.3 Implicazioni metafisiche delle teorie matematiche e musicali di Leibniz	58

6. Influenza e eredità	60
	60
6.1 Impatto del calcolo leibniziano sulla matematica moderna	60
6.2 Risonanze del pensiero di Leibniz nella teoria musicale successiva	61
6.3 Leibniz come precursore dell'interdisciplinarietà moderna	61
7. Conclusioni	62
7.1 Sintesi delle connessioni tra calcolo infinitesimale e musica in Leibniz	63
7.2 Riflessioni sull'attualità del pensiero leibniziano	66
7.3 Prospettive per future ricerche	67
Appendici	68
A. Glossario dei termini matematici e musicali	70
B. Cronologia della vita e delle opere di Leibniz	75
C. Selezione di partiture musicali rilevanti per l'analisi	77
Bibliografia	80

Prefazione

C'è un ponte naturale tra musica e matematica e ad ogni livello esso può essere attraversato dagli esseri umani oltre che più o meno coscientemente da ogni essere vivente. Rigore logico ed espressione artistica hanno sempre affascinato studiosi e filosofi. È in questo contesto che si inserisce Gottfried Wilhelm Leibniz, luminosissimo esponente di alto profilo dell'intelletto umano. Egli ha dedicato il suo genio, tra l'altro, allo sviluppo del calcolo infinitesimale e alla profonda conoscenza della musica e della teoria musicale.

Il territorio delle interconnessioni tra calcolo infinitesimale e musica è straordinario e fondamentale per comprendere i dettagli più profondi della musica in tutte le sue forme. Dall'antichità l'uomo ha aggiunto pezzi come in un puzzle e così, addentrandoci nei meandri della conoscenza grazie agli studi degli astrofisici inerenti rilievi dei satelliti e telescopi della NASA e dell'ESA, si è scoperto che nel brodo primordiale vivono frequenze ed intervalli che Pitagora aveva già individuato e descritto.

Sembrano ambiti lontanissimi e per nulla connessi tra loro; eppure, c'è musica in ogni cosa: in ogni elefante che barrisce con un salto d'ottava, in ogni lupo che ulula con un intervallo di quinta, in ogni scimmia che intona col proprio verso un intervallo di terza maggiore¹. Ed è proprio qui che per comprendere ogni singola sfumatura occorre affrontare il lavoro di Leibniz. Apparentemente questi ambiti sembrano distinti, ma ogni nota non è forse una "monade"? Esiste, è lì, autonomamente svolge il suo perfetto compito di nota, fondamentale per l'intera opera del grande orologiaio². Ogni suono è totalmente ignaro del resto del mondo armonico e melodico intorno a sé. Eppure, consiste ed esiste e crea magnifiche relazioni numeriche. La musica è per Leibniz un microcosmo che va ben al di là del semplice apprezzamento estetico e che contiene quell'ordine cosmico che teorizza, mediante analogie tra strutture matematiche e proporzioni armoniche, la natura dell'universo.

Leibniz ha magistralmente compreso ante litteram come “il grande orologiaio” ha costruito ingranaggi perfetti e come essi manovrano, in perfetto sincronismo, l'universo in ogni dettaglio finanche nei suoni. Connessioni sorprendenti tra formalismo matematico e calcolo infinitesimale si dipanano e tramite un approccio interdisciplinare è possibile, come Leibniz, di ripercorrere e scoprire la teoria e l'armonia, la fisica acustica e l'informatica, la psicoacustica ed ogni singola sfumatura

¹ Colla, A. (2017). Manuale di armonia - L'evoluzione dominante (Vol. 1). Carisch.

² Boyle, R. (1686). A free enquiry into the vulgarly received notion of nature. H. Clark for John Taylor

delle numerose discipline coinvolte nella produzione, percezione, diffusione e manipolazione di un suono. Il concetto di continuità è fondamentale e la ricerca ha evidenziato, mediante la sua analisi, quanto esso sia un ponte tra matematica e musica.

La sua visione di infinito matematico trova corrispondenze nella struttura armonica musicale, ma anche nei parametri degli equalizzatori nelle Digital Audio Workstations e finanche nei preamplificatori per chitarra e basso, nei filtri dei mixer, nei software di sintesi e nei linguaggi di programmazione ad oggetti dedicati all'audio. Un pattern di pensiero che attraversa trasversalmente diverse discipline. L'interazione dei diversi campi del sapere è fulcro di questo lavoro che omaggia Leibniz, mostrando quanto sia stato capace di tessere connessioni tra ambiti solo apparentemente distanti, ma anche incredibilmente attuali e moderni, diventando ossa, sangue e pensiero delle tecnologie musicali, dell'informatica, dell'elettronica, e delle matematiche applicate alla musica.

Villaricca (Na), 13/01/2025

Raffaele Cardone

1.1 Contesto storico e biografico di Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasce a Lipsia, nella Germania profondamente segnata dalla Guerra dei Trent'anni, che conclusasi nel 1648 inflisse devastanti ferite sia economiche che sociali, e visse nella fase di ricostruzione post-bellica. L'Europa era dominata dall'ancien régime che vedeva in Luigi XIV il massimo esponente.

L'epoca, nonostante tutto, fu foriera di fermenti culturali: si affacciava al mondo il razionalismo cartesiano con la ragione quale fondamento della conoscenza, e le numerose scoperte e sviluppi in numerose discipline quali fisica, matematica e filosofia mostrarono al mondo che l'era delle rivoluzioni scientifiche era iniziata. Scienziati, studiosi, pensatori di altissimo profilo videro diffondersi interesse sempre maggiore intorno ai loro studi, e Isaac Newton, Christiaan Huygens e Baruch Spinoza cambiarono definitivamente il corso della storia e del futuro dell'umanità. Fu proprio nell'Europa di questo periodo che Leibniz visse e si inserì, e con le sue innovazioni contribuì a lasciare un segno indelebile che ancora oggi vive e si rinnova in ogni musicista, in ogni computer, in ogni astronomo e fisico, in ogni filosofo e matematico, perfino in ogni autista che usando il GPS implicitamente utilizza innovazioni del calcolo infinitesimale di Leibniz.

Il piccolo Gottfried viveva in un contesto familiare colto e con grande tradizione accademica e si mostrava, da bambino, interessato allo studio ed alla cultura.

A vent'anni conseguì la laurea in giurisprudenza ed intraprese gli studi di filosofia e diritto presso l'Università di Lipsia. Si formò nelle discipline scientifiche da autodidatta, e fu questa spinta interiore che lo accompagnerà per l'intera esistenza. Nel 1672 fu inviato come diplomatico a Parigi, e fu proprio in questa città che trascorse i quattro anni fondamentali per la sua preparazione matematica. Nel 1676 il duca di Hannover gli propose di divenire consigliere e bibliotecario alla sua corte, e ne approfittò notevolmente per ampliare le sue conoscenze, fondando l'accademia delle scienze di Berlino. Siamo nell'anno 1700.

Quando pensiamo a Leibniz dobbiamo immaginarlo come il centro di un asterisco dove i diversi raggi sono le competenze, le conoscenze del grande scienziato. La sua mente brillante gli ha permesso di acquisire una preparazione di altissimo profilo in numerosi campi, tra cui la matematica, filosofia, logica, tecnologia. Sviluppò indipendentemente da Newton il calcolo infinitesimale, indispensabile in ogni settore scientifico e matematico e come vedremo, musicale.

Infine, migliorò, riprogettandole, macchine calcolatrici, e se oggi utilizziamo il computer col sistema binario lo dobbiamo a lui, difatti egli è il precursore della moderna informatica.

Leibniz era un razionalista ottimista, e ben presto divenne una figura di spicco nelle questioni scientifiche-filosofiche del suo tempo, proprio in virtù dei suoi costanti tentativi di far convivere i

filoni di caduta meccanicismo e finalismo. Visionario, la sua vita è stata densissima di studi, eventi, e scelte (da luterano, disse no alla direzione della biblioteca vaticana³).

Purtroppo, la sua vita, soprattutto negli ultimi periodi, non fu scevra da dispute e dispiaceri, soprattutto riguardo la questione della paternità del calcolo infinitesimale. Questa questione segnò i suoi ultimi anni e a lungo non fu creduto, morendo isolato ad Hannover nel 1716, ignorato dagli accademici del tempo.

Oggi sappiamo con discreta certezza che sia Newton che Leibniz giunsero, percorrendo vie differenti, agli stessi risultati negli studi sul calcolo infinitesimale. Leibniz però ha influenzato il pensiero tedesco successivo mediante l'idealismo, ed il suo approccio che fa dell'interdisciplinarietà una incredibile risorsa lo pone sull'altare del pensatore universale, capace di attraversare i cieli della metafisica, il mare della politica, i terreni della logica, connettendo e sintetizzando i vari campi del sapere.



Figura 1: Ritratto di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

³ Oddifreddi P. (2003 p.43). Il diavolo in cattedra. Einaudi.

1.2 Obiettivi e metodologia della ricerca

John Locke fu un grande ispiratore per Leibniz, che fu profondamente influenzato dalla lettura della sua opera “*An Essay Concerning Human Understanding*” (Saggio sull'intelletto umano, in realtà una traduzione più fedele del titolo sarebbe “*Un saggio sulla comprensione umana*”). L'opera venne pubblicata nel 1689 (anche se per vari motivi legati all'editore fu posticipata la data al 1690) ed affronta i fondamenti della comprensione, dell'intelletto e della conoscenza umana.

Una mente umana appena nata è vuota e va riempita attraverso le esperienze. Quest'opera pose le fondamenta all'empirismo, precursore del positivismo logico, influenzando anche molti filosofi dell'illuminismo. Lo spessore pedagogico dell'opera è evidente e Locke stende il manto delle conoscenze complesse come l'insieme di associazioni semplici di idee ed infine porta al giudizio. Pedagogicamente e psicologicamente fu una vera innovazione per i processi di apprendimento inserendo in essi oltre alla percezione anche l'esperienza.

L'opera, in quattro libri, fu illuminante per Leibniz soprattutto quando Locke affronta i limiti della mente umana e il problema della conoscenza. Egli rispose all'opera di Locke pubblicando “*Nuovi saggi sull'intelletto umano*” nel 1765, con repliche e commenti puntuali ad ogni capitolo dell'opera del filosofo inglese. Confuta, dichiara se d'accordo o meno, ed insieme a “*i saggi di teodicea*” rappresenta l'opera più lunga di Leibniz.

Completò l'opera nel 1704 ma purtroppo per via della morte di Locke rinviò la pubblicazione poi effettuata postuma nel 1765.

Nell'opera ci sono due personaggi: Teofilo (che dal greco significa colui che ama Dio) rappresentante del pensiero di Leibniz e Filatele (che significa colui che ama la verità) che interagisce con la visione del pensiero di Locke.

Le teorie empiriste relative alla provenienza delle idee vengono confutate nella frase che appare all'inizio del libro II “*Niente è nell'intelletto senza essere stato prima nei sensi, tranne l'intelletto stesso*” dove Leibniz riprende perfino la stessa struttura dell'opera di Locke.

Leibniz non si focalizza sulla conoscenza ed i suoi principi dal punto di vista logico ma sulle facoltà ed i modi per raggiungere la verità. Egli ha una posizione che si potrebbe definire neoplatonica soprattutto dove viene tracciata la differenza tra sensibilità e ragione (intelletto)⁴.

Egli considera eterne solo le *verità di ragione*, perché esse sono valide in ogni mondo possibile.

⁴ “ [...] le idee che vengono dai sensi sono confuse, e le verità che ne dipendono lo sono pure, almeno in parte; invece le idee intellettuali e le verità che ne dipendono sono distinte, e non hanno origine né le une né le altre dai sensi, sebbene sia vero che non le penseremmo mai senza i sensi (Nuovi saggi, 1.1.11 [G 5.39-509])”.

Ed è proprio in questo punto la grande differenza e la critica all'empirismo radicale di Locke. Un altro punto interessante per comprendere la sua metodologia di ricerca è ciò che intende per anima e se essa sia interamente vuota (*tabula rasa*) come sostiene Aristotele e lo stesso Locke lasciando all'esperienza, utilizzando i sensi, il compito di acquisire nozioni e informazioni o se, come sostiene lo stesso Leibniz, ci siano degli elementi e degli istanti che attivano ciò che l'anima già contiene. Questa posizione lo avvicina a Platone e agli scolastici.

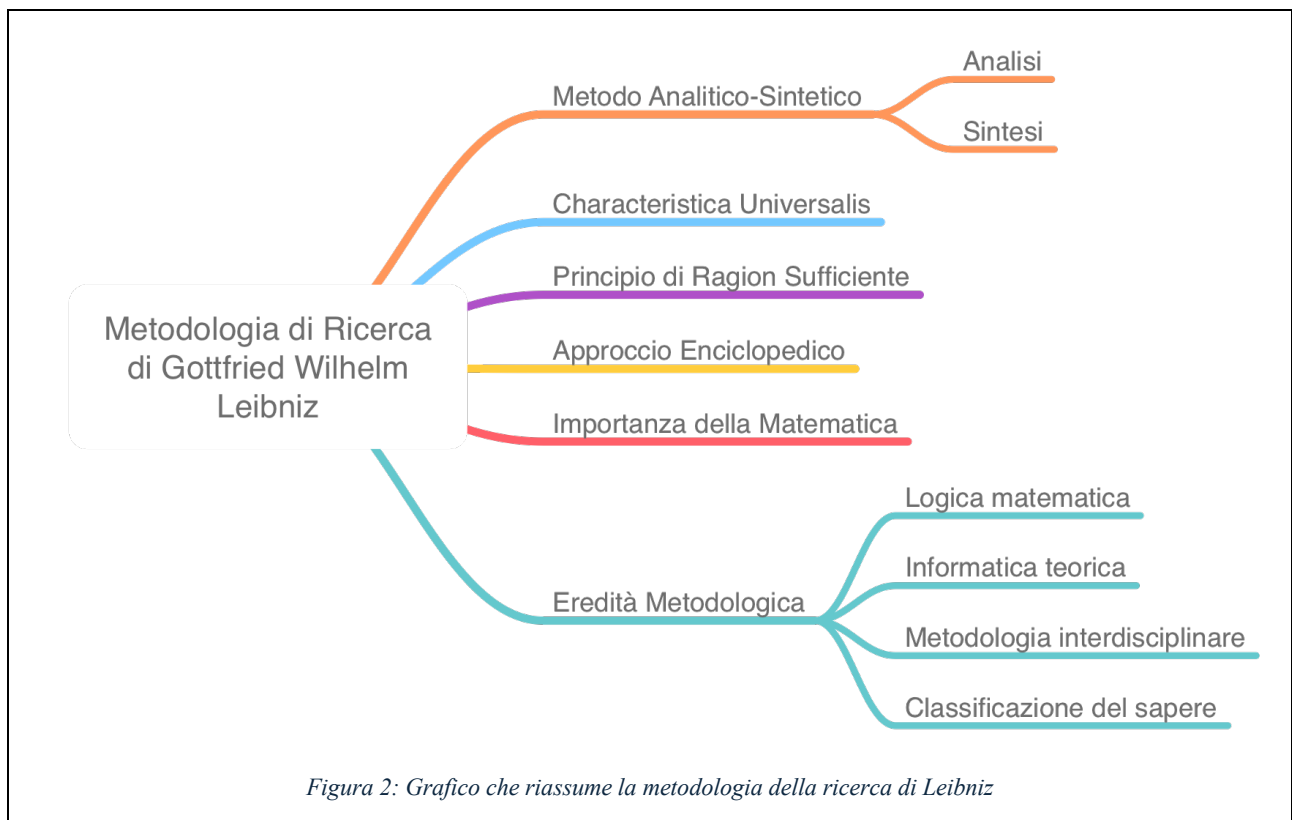
E se ciò è vero e se possiamo trovare un modo per prevedere i percorsi di questi principi interni essi sono da considerare secondo l'autore *innati*. L'esperienza non dà verità universali questa è la sintesi e per Leibniz l'uomo conosce già di fatto le verità universali e quindi tutto si trova già nell'uomo stesso. In tal modo si proclama l'avvicinamento alla teoria della reminiscenza platonica.

È necessaria una postilla che pone la questione in termini più dettagliati: egli non sostiene che tutto è già nell'uomo⁵ ed è davanti ai nostri occhi ma che l'uomo ha per sua struttura, l'intelletto per portare alla luce le verità di ragione.

Visione innatista platonica/leibniziana da un lato e visione empirista, aristotelica, dall'altro. In sintesi, questi i due mondi; nel primo nessuna conoscenza entra dall'esterno (come le monadi che non comunicano), la mente contiene già tutte le forme e le idee potenziali e Leibniz sostiene che le entrambe le tipologie di idee, sensibili o intellettuali che siano, siano già nell'uomo ed è la *struttura del suo intelletto che è già predisposta* per portarle alla luce e la conoscenza è un processo di sviluppo delle idee innate.

Nel secondo, la mente è come una "*tabula rasa*" e le idee provengono dai sensi e pertanto la conoscenza si costruisce mediante l'esperienza sensibile. Si delinea la figura del grande orologiaio che tutto dispone.

⁵ "Nulla entra nella mente da fuori, ed è una nostra cattiva abitudine ragionare come se la nostra anima ricevesse delle specie messaggere e come se avesse porte e finestre. Noi abbiamo nella mente tutte queste forme, e per di più di ogni tempo, perché la mente esprime sempre tutti i suoi pensieri futuri, e pensa già confusamente tutto ciò che penserà distintamente. E nulla potrebbe essere appreso se non ne avessimo già nella mente l'idea, che è come la materia di cui questo pensiero si forma" [...] Aristotele ha preferito paragonare la nostra anima a tavolette ancora vuote, dove c'è posto per scrivere, e ha sostenuto che nel nostro intelletto non c'è nulla che non provenga dai sensi. Ciò si accorda di più con le nozioni popolari, come è abitudine di Aristotele, mentre Platone va più a fondo. Tuttavia, questi tipi di dossologie o praticologie possono essere tollerate nell'uso ordinario, più o meno come vediamo che coloro che seguono Copernico non smettono di dire che il sole si leva e tramonta (Discorso di Metafisica, 26-27 [G 4.427-463])".⁵



2. Il calcolo infinitesimale di Leibniz

Nell'estate del 1666 Isaac Newton vide una mela cadere da un albero e intuì quella che successivamente sarebbe stata nota come *“teoria della gravitazione universale”*.

Oltre l'aneddoto, raccontato dallo stesso Newton in età avanzata, vi è una grande verità, ovvero che la mela durante la caduta, accelera. Solleva, quanto appena scritto un bel po' di problemi. Cosa si intende per “velocità” in ogni istante? La famosa formula

$$velocità = spazio / tempo$$

vale infatti se la velocità del moto è costante ovvero se la distanza è proporzionale al tempo.

Questo non accade mentre la mela cade, essa infatti, accelera durante la caduta o per essere più precisi *“la mela cade con maggior velocità al passare del tempo”*.

Già Galileo⁶ scoprì che la distanza percorsa in un intervallo di tempo t è proporzionale al quadrato del tempo. Quindi se in un intervallo di tempo t la mela percorre una distanza d , dopo il doppio del tempo trascorso non avremo il doppio della distanza percorsa ma il quadruplo⁷.

Se riportiamo questo graficamente vedremo che la curva della velocità vira verso l'alto e non è più costante.

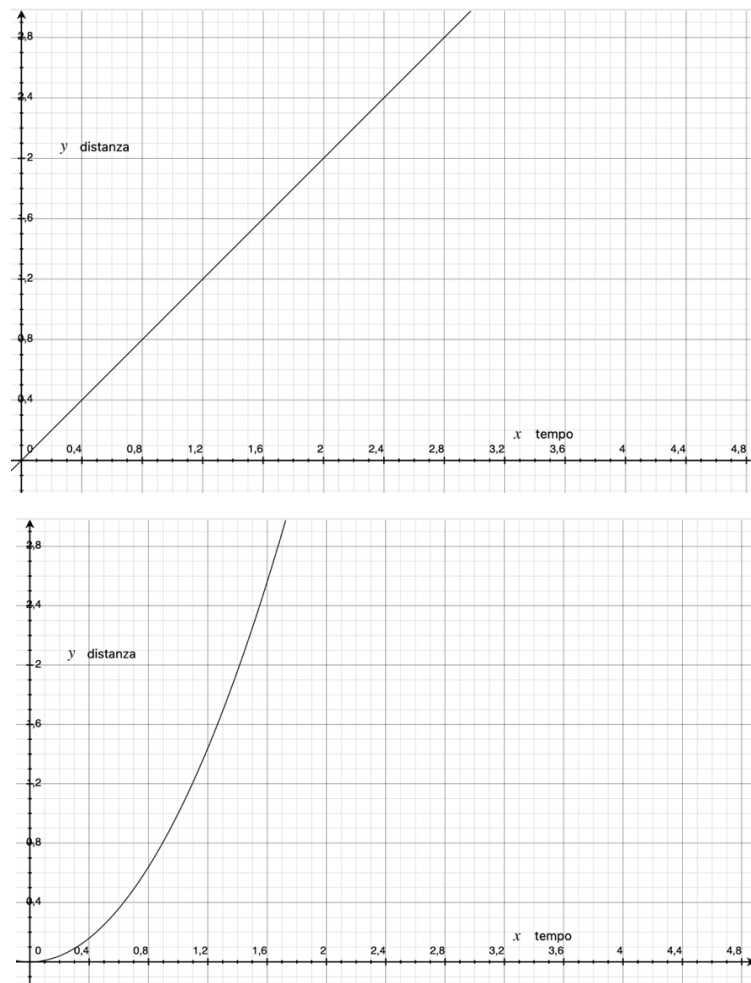


Figura 3: Confronto tra moto uniforme (in alto) e moto uniformemente accelerato (in basso). I grafici mostrano la relazione tra distanza (y) e tempo (x): lineare nel moto uniforme e parabolica nel moto uniformemente accelerato.

⁶ Galilei, G. (1632). Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo [Dialogue concerning the two chief world systems]. Landini.

Galilei, G. (1638). Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze [Discourses and mathematical demonstrations relating to two new sciences]. Elzevir.

⁷ Galileo Galilei dimostrò che lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo ($s \propto t^2$), mentre la velocità aumenta linearmente con il tempo. Questo comportamento è molto diverso dal moto uniforme, dove la velocità rimane costante e lo spazio percorso è direttamente proporzionale al tempo.

Questo è il fulcro del calcolo infinitesimale: esso è lo studio di come "qualcosa" vari al trascorrere del tempo. Nel dettaglio è lo studio della velocità con cui avviene il cambiamento. Questa disciplina si sviluppò significativamente già nella metà del XVII secolo e, come già anticipato, fu oggetto di un'accesa e triste diatriba a distanza sulla sua paternità (tra Newton in Inghilterra e Leibniz in Germania⁸).

Vi è prova dello scambio epistolare tra i due, inizialmente cordiale⁹. Sebbene non si incontrarono mai, la corrispondenza sfociò in un'aspra diatriba sulla paternità della scoperta¹⁰. Era prassi all'epoca scambiarsi le ricerche e corrispondere con altri filosofi, pensatori e scienziati. Newton e Leibniz giunsero indipendentemente alle stesse conclusioni, ma è la notazione di Leibniz che è tuttora utilizzata, come approfondiremo in seguito (La notazione differenziale di Leibniz (dx/dy) si dimostrò più intuitiva e versatile rispetto alla notazione delle flussioni di Newton). Inoltre, i due scienziati avevano approcci profondamente diversi al calcolo: Newton si concentrava sulle “flussioni” con un approccio cinematico (e vedeva il calcolo come uno strumento per la fisica) e Leibniz, col calcolo infinitesimale aveva un approccio più algebrico (e concepiva il calcolo come uno sistema formale più generale).

La conclusione principale di questo lavoro di tesi è che il calcolo infinitesimale è fondamentale per tutte le discipline, inclusa la musica in quanto le applicazioni di esso in quest'arte includono, lo studio delle onde sonore, delle serie armoniche e delle vibrazioni generate durante la produzione e diffusione del suono degli strumenti musicali¹¹.

⁸ La controversia sulla priorità dell'invenzione del calcolo infinitesimale è documentata negli atti della Royal Society del periodo 1708-1716. La raccolta della corrispondenza inerente la disputa è il *Commercium epistolicum* (1712), pubblicato dalla Royal Society.

⁹ Il carteggio iniziò nel 1675 e proseguì fino al 1677 attraverso Henry Oldenburg, segretario della Royal Society.

¹⁰ La disputa si intensificò dopo la pubblicazione del *Nova Methodus* (1684) di Leibniz e dei *Principia* (1687) di Newton.

¹¹ Lombardo Valle, Audio e multimedia, Maggioli.

2.1 Genesi e sviluppo del calcolo leibniziano

All'università di Yale è presente, nella collezione babilonese, una tavoletta di argilla, ormai famosissima. È nota come la YBC7289 ed è datata intorno al 1700 a.C. Su questa tavoletta si scoprì che oltre al quadrato riportato e alle due diagonali che lo dividono vi era una scritta, in notazione sessagesimale (base sessanta) cuneiforme. Riporta la $\sqrt{2}$ con una incredibile accuratezza, fino alla sesta cifra decimale (1,41421296...). Ciò dimostra che i babilonesi avevano compreso la relazione tra la diagonale e il lato del quadrato (sarebbe poi diventato il famoso teorema di Pitagora) e sapevano che nei quadrati, il rapporto tra diagonale e lato è la $\sqrt{2}$. Il metodo usato per il loro calcolo era quello che oggi riteniamo simile al metodo iterativo di Newton-Raphson solo che loro lo usavano 3500 anni prima di Newton! Leibniz era particolarmente affascinato dai sistemi numerici e nel saggio "De Progressione Dyadica" (1679) parla dei sistemi numerici tra cui quello sessagesimale babilonese e fu tra i primi occidentali a riconoscerne l'utilità per i calcoli astronomici e matematici di precisione. In relazione all'uso della radice quadrata da parte dei babilonesi loro usavano un algoritmo iterativo, algoritmo che Leibniz giustificò teoricamente col calcolo differenziale. Il metodo può essere visto come un modo per trovare gli zeri della funzione $f(x) = x^2 - N$, dove il punto di convergenza è $\sqrt{N}$. La formula di iterazione deriva applicando il metodo delle tangenti di Newton, che Leibniz dapprima studiò e poi sviluppò ulteriormente.

Dai tempi più remoti l'uomo ha studiato ed applicato la geometria, con un primo apice raggiunto nell'antica Grecia ma l'algebra è più attuale. Basti pensare al segno uguale ($=$). Esso apparve solo nel 1557, poco meno di cento anni dalla nascita di Leibniz. L'algebra è necessaria per esprimere concetti generali in breve e per manipolarli. Possiamo utilizzare l'algebra per calcolare le frequenze delle note ad esempio

$$\text{Frequenza della nota} = f_0 (2^{(n/12)})$$

dove

f_0 è la frequenza di partenza (esempio un La a 220 Hz)

n è il numero di semitoni di distanza dalla nota iniziale (esempio se inseriamo 2 partendo dalla nota La individueremo la frequenza della nota Si).

12 rappresenta il nostro sistema di riferimento.

Nel caso specifico l'ottava è divisa in 12 semitoni. Questa formula mostra come le note sono collegate tra loro e come calcolare rapidamente tutte le frequenze delle note che desideriamo. Essa è fondamentale per costruire strumenti musicali, sintetizzatori, software musicali e ci mostra come l'algebra sia fondamentale per la musica. L'algebra e la geometria si ricongiungono in molti punti,

oggi ad esempio se volessimo vedere $y = x^2$ immediatamente disegneremo su un foglio degli assi cartesiani che non si chiamano così per un caso perché fu proprio René Descartes nel 1637 a idearli¹². In realtà anche Pierre de Fermat¹³ lavorò a qualcosa di simile nello stesso periodo ed in modo indipendente da Cartesio.

Già i greci utilizzavano qualcosa di simile, e gli assi cartesiani furono perfezionati successivamente, con la possibilità di rappresentare anche i valori negativi, fino a renderli come li conosciamo ed utilizziamo oggi. Gli assi cartesiani consentono di rappresentare le equazioni algebriche come curve geometriche. Il calcolo infinitesimale trasse enorme beneficio da ciò e quella di Cartesio fu un'intuizione fondamentale per lo sviluppo successivo.

$$y=x^2$$

Σ ~

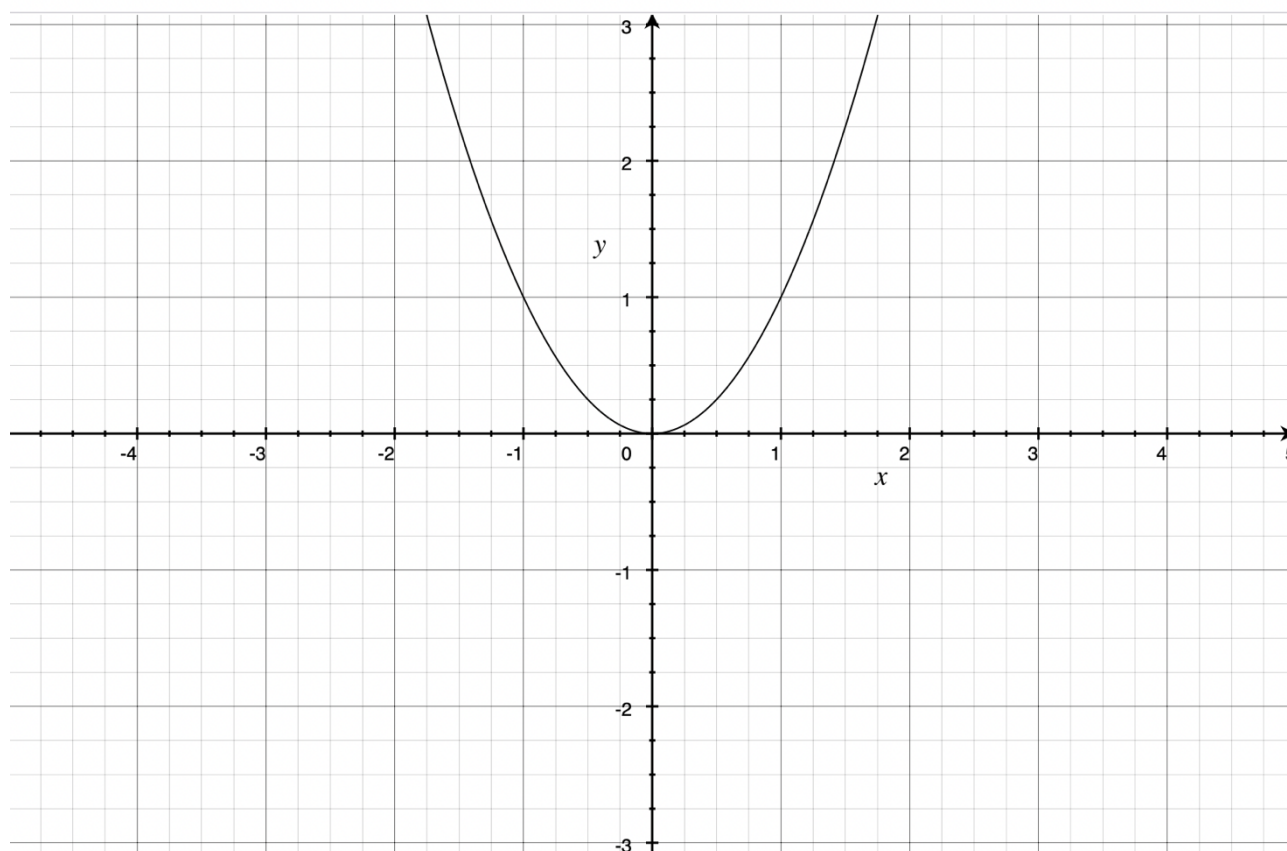


Figura 4: Il grafico della funzione $y=x^2$

Il concetto di “*infinito*” è di fondamentale importanza per la ricerca della genesi del calcolo infinitesimale.

Occorre citare Archimede e siamo verso il 220 a.C. In verità ciò che ci occorre comprendere è il concetto di *graduale avvicinamento* all’infinito.

¹² nel saggio "La Géométrie", appendice al suo "Discours de la méthode"

¹³ (1601-1665)

Pensiamo all'area e alla circonferenza del cerchio. Introduciamo il concetto di π :

$$\pi = \text{circonferenza}/\text{diametro}$$

quindi il suo rapporto è uguale per tutti i cerchi. La formula per il calcolo della circonferenza $= 2\pi r$ è tra le più note in assoluto.

Quando invece proviamo a calcolare l'area entra in gioco Archimede.

Se consideriamo il centro del cerchio il vertice di un triangolo possiamo ricostruire un cerchio con N triangoli e calcolare le aree degli N triangoli fino ad avvicinarci sempre più al cerchio e quindi sempre più sottili.

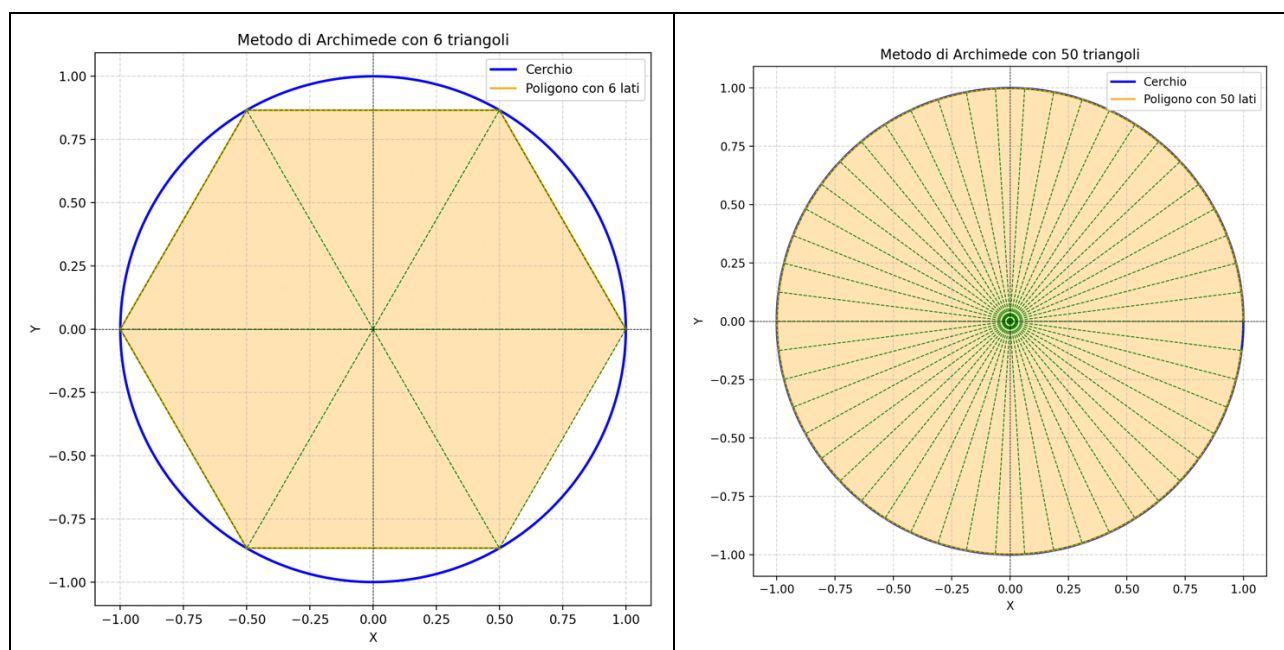


Figura 5: Metodo di Archimede per la ricostruzione del cerchio mediante triangoli

Si evince dai grafici che se si aumenta il numero di triangoli (N) si avvicina alla formula $\text{area} = \pi r^2$.

Possiamo immaginare l'area del cerchio come il risultato di infiniti tentativi di calcolo dell'area di triangoli N sempre più piccoli ma sempre più numerosi costruiti tramite un poligono regolare inscritto.

In tal modo descriviamo il *limite* dell'area del poligono al tendere di N all'infinito ($N \rightarrow +\infty$).

In sintesi, più aumentiamo i lati del poligono e più ci avviciniamo al calcolo preciso dell'area del cerchio.

Anche il concetto di “*serie infinite*” è di fondamentale importanza. La “*serie geometrica di ragione 1/4 e primo termine 1/4*”, è un esempio noto.

Essa si ottiene utilizzando la base identica (1/4) e sommando una frazione i cui esponenti aumentano ad ogni base:

$$(1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + \dots) = 1/3$$

In questo caso specifico, la somma della serie infinita è effettivamente 1/3 ed è una serie geometrica infinita con $|r| < 1$, dove la somma è data dalla formula:

$$S_{\infty} = a/(1-r)$$

Dove a è il primo termine e r è la ragione nel nostro caso: $a = 1/4$ $r = 1/4$

Siamo davanti ad un esempio di come una serie geometrica infinita possa convergere a una frazione semplice. La chiave è che stiamo usando la stessa base (1/4) e aumentando gli esponenti, non stiamo aumentando il denominatore come nella serie armonica o nella serie di Basilea. La serie nota come "Serie di Leibniz" è $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \dots$ e quando prosegue all'infinito converge a $\pi/4$. Questo è uno degli esempi storici su come una serie infinita può esprimere un π .

Notiamo che in questa serie vi sono segni positivi e negativi. È interessante anche notare che mentre la serie di Leibniz converge (arriva a un risultato finito), la serie armonica infinita ($1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$) diverge, cioè la sua somma cresce senza limite.

Tutto ciò ha consentito a Leibniz di produrre delle serie molto rilevanti per la musica come ad esempio quella relativa alla rappresentazione del suono attraverso sinusoidi¹⁴.

Consideriamo una nota musicale singola, che può essere rappresentata come una somma infinita di sinusoidi, come descritte dalle serie di Fourier (ogni forma d'onda complessa è realizzabile sovrapponendo sinusoidi semplici). Leibniz contribuì alla comprensione matematica di queste serie, anche se la formalizzazione completa venne dopo di lui con Fourier.

La serie di Fourier utilizzata per ricreare un'onda quadra (che mediante la sintesi additiva a spettro armonico permette di ricreare il suono di alcuni strumenti come il clarinetto) può essere indicata come:

$$4/\pi * (\sin(x) + 1/3 \sin(3x) + 1/5 \sin(5x) + 1/7 \sin(7x) + \dots)$$

¹⁴ Fu poi Euler, dopo la morte di Leibniz che prese spunto dai suoi studi per diffondere la notazione di Leibniz, gli studi sulle serie e sul calcolo infinitesimale. E Fourier che definì come onde complesse nascono da sovrapposizioni di sinusoidi.

Questa serie è particolarmente interessante perché ci mostra come i suoni complessi sono composti da armoniche, con i suoi denominatori dispari (1, 3, 5, 7...) ricorda la serie di Leibniz. Questo si collega al principio che ogni suono musicale è in realtà una somma di frequenze multiple della fondamentale, proprio come una serie matematica è una somma di termini correlati.

Oggi possiamo “vedere” con analizzatori di spettro ed oscilloscopi le note e verificare questa teoria ma all’epoca era impossibile ed Helmholtz con i suoi risuonatori sarebbe stato in grado di identificare le diverse componenti armoniche di un suono complesso solo nel 1863 con la pubblicazione del suo tratta fondamentale *“Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik”*¹⁵.

2.2 La notazione differenziale e il suo impatto

Serie infinite, problema del moto, pendenza delle curve e il concetto di area sottesa delle curve sono i pilastri fondativi del calcolo infinitesimale.

Se immaginiamo una retta e due punti su essa, possiamo individuare la pendenza di una curva proprio grazie agli studi di Leibniz. I due punti A e B sulla retta che possiamo immaginare disegnata sugli assi cartesiani, possono esprimere la pendenza della curva in A come il limite del rapporto quando B tende ad A:

$$\text{pendenza della curva in A} = \lim_{B \rightarrow A} \left(\frac{\text{incremento di } y}{\text{incremento di } x} \right)$$

Ciò che abbiamo appena letto è fondamentale, ad esempio, nelle DAW (Digital audio workstations) dove le regioni audio che vengono editate possono essere sottoposte ad algoritmi di fade in e fade out (assolvenza e dissolvenza) proprio utilizzando questa funzione per definire la pendenza nel tempo dell’ampiezza dell’onda definendo gli incrementi e decrementi in Decibel dell’onda sonora complessa.

¹⁵ La Teoria delle Sensazioni Tonalì come Base Fisiologica per la Teoria della Musica

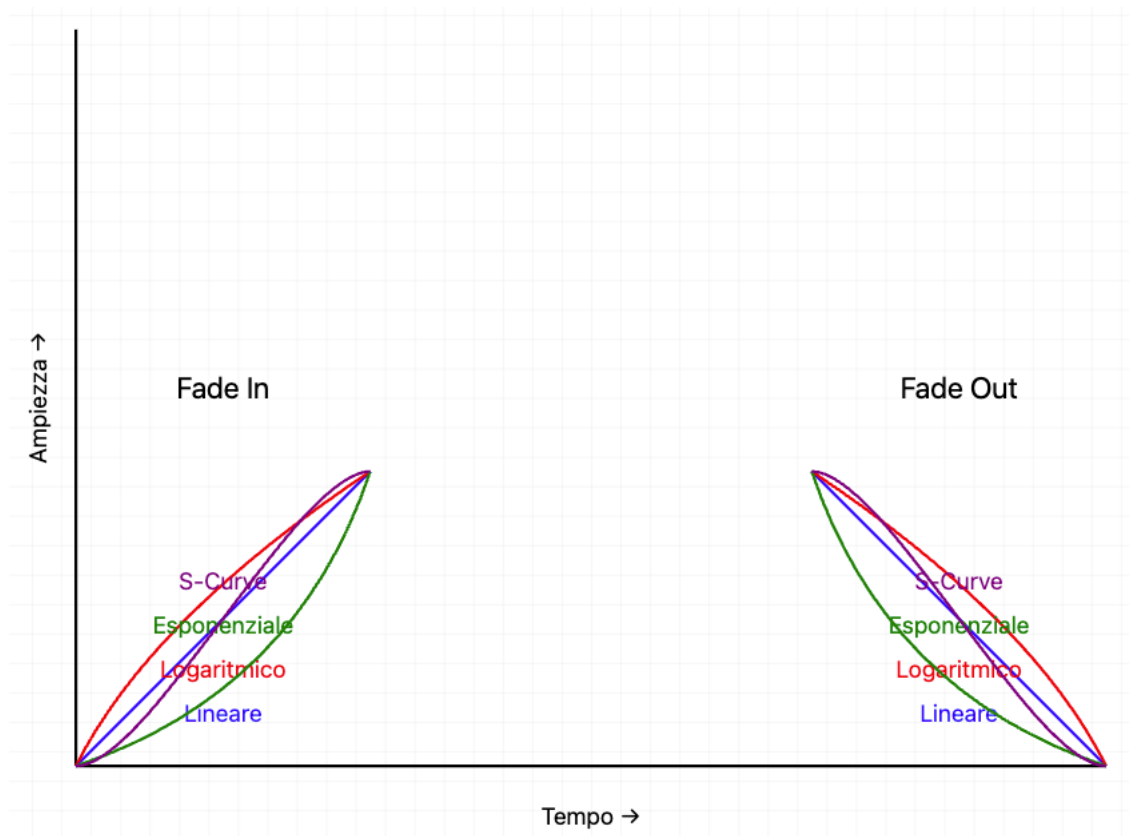


Figura 6: Le diverse curve delle funzioni di Dissolvenza eed assolvenza nelle DAW

Nel grafico sono riportati i diversi tipi di fade in e fade out. Si noti in blu il fade lineare, in rosso quello logaritmico, in verde quello esponenziale, in viola la S-curve, una particolare tipologia di fade che prevede una transizione graduale di ampiezza.

Il procedimento che fornisce la pendenza della curva a partire dalla sua equazione si chiama differenziazione e si usa la lettera greca Δ per indicare "incremento di".

Per meglio definire i concetti precedenti possiamo fare degli esempi se x aumenta da 1 a 1,02 Δx varrebbe 0,02. Quindi sia Δx che Δy indicano gli incrementi di x e di y quando seguono la curva dal punto A al punto B vicino. La differenziazione consiste proprio nel trovare il limite di $\Delta y / \Delta x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$ ovvero quando B si avvicina ad A. pertanto possiamo giungere alla formula

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Per rappresentare nello stesso tempo la pendenza della curva e la rapidità con cui y aumenta al crescere di x utilizzeremo la "derivata di y rispetto a x ".

Applicando tutto ciò ai fade in e out¹⁶ ciò che otteniamo può essere riassunto nei grafici e nella tabella seguente:

Lineare (blu)	• Curva: retta diagonale • Derivata: linea orizzontale (costante) • Il tasso di cambiamento è costante
Logaritmica (rossa)	• Curva: rapida all'inizio, poi graduale • Derivata: $1/x$ (decresce gradualmente) • Il tasso di cambiamento diminuisce nel tempo
Esponenziale (verde)	• Curva: graduale all'inizio, poi rapida • Derivata: e^x (cresce gradualmente) • Il tasso di cambiamento aumenta nel tempo
S-Curve (viola)	• Curva: dolce agli estremi, rapida nel mezzo • Derivata: curva a campana • Il tasso di cambiamento è massimo nel punto centrale

¹⁶ assolverenza e dissolverenza audio.

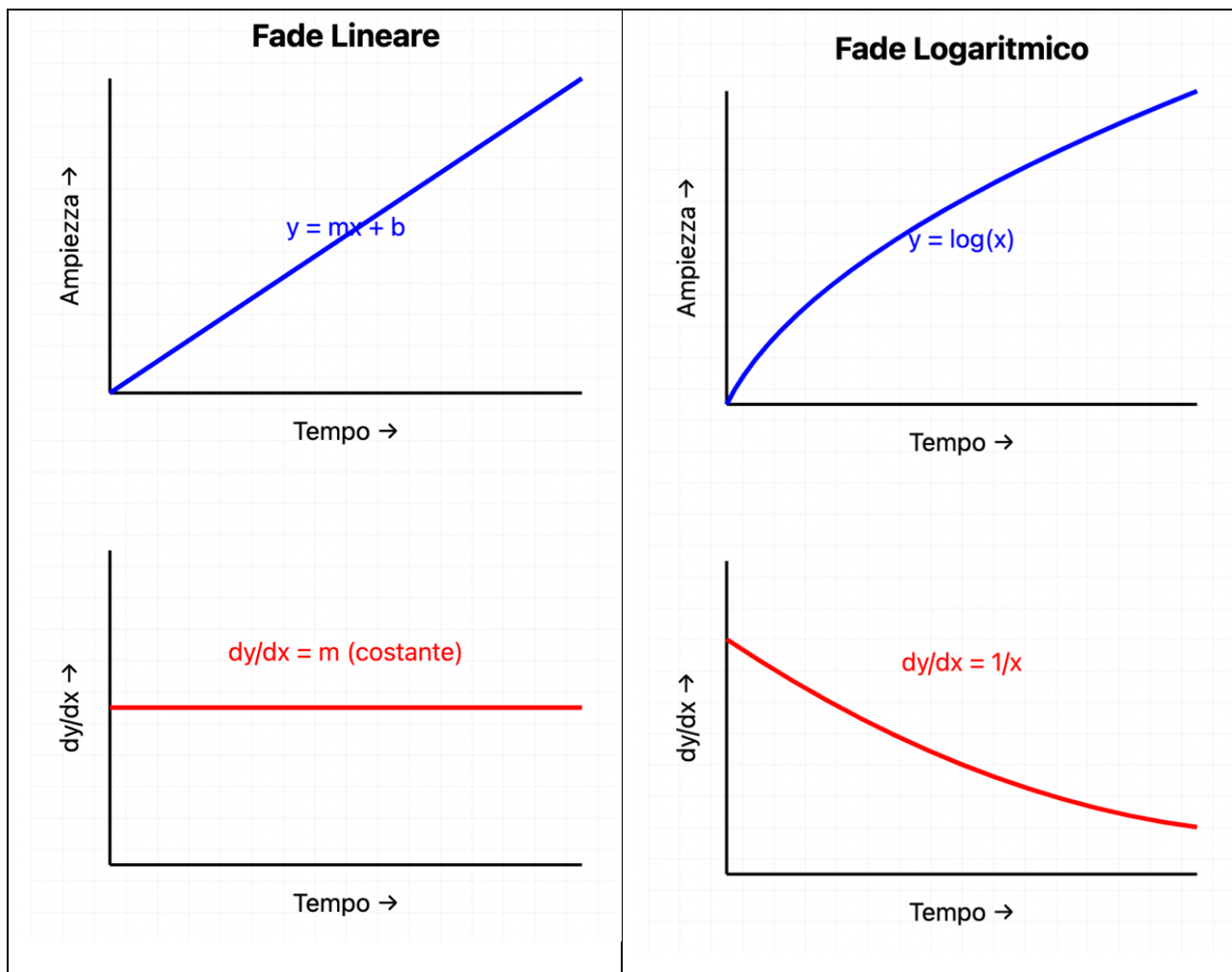


Figura 7: Fades differenti in funzione di ampiezza e tempo

Notiamo che nella parte superiore del grafico è espresso, sull'asse y l'ampiezza e sull'asse x il tempo mentre nella parte inferiore del grafico sull'asse y troviamo dy/dx e sull'asse x il tempo.

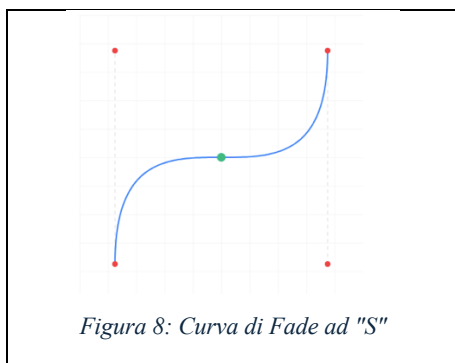


Figura 8: Curva di Fade ad "S"

Inoltre, la funzione nota come S curve è nota anche come curva di Bézier¹⁷ cubica in quanto usa polinomi di terzo grado ed è questo il motivo del termine "cubica".

Notiamo che per realizzarsi questa curva necessita di ben quattro punti di controllo, ovvero due punti di controllo agli estremi e due intermedi. Così è possibile definire la forma ad S.

¹⁷ La curva di Bézier, sviluppata da Pierre Bézier negli anni '60 mentre lavorava alla Renault, è uno strumento matematico fondamentale nel design computerizzato. Nel contesto musicale, queste curve "fluide" sono utilizzate per rappresentare la notazione musicale digitale, permettendo di riprodurre l'estetica della scrittura musicale manuale attraverso equazioni parametriche.

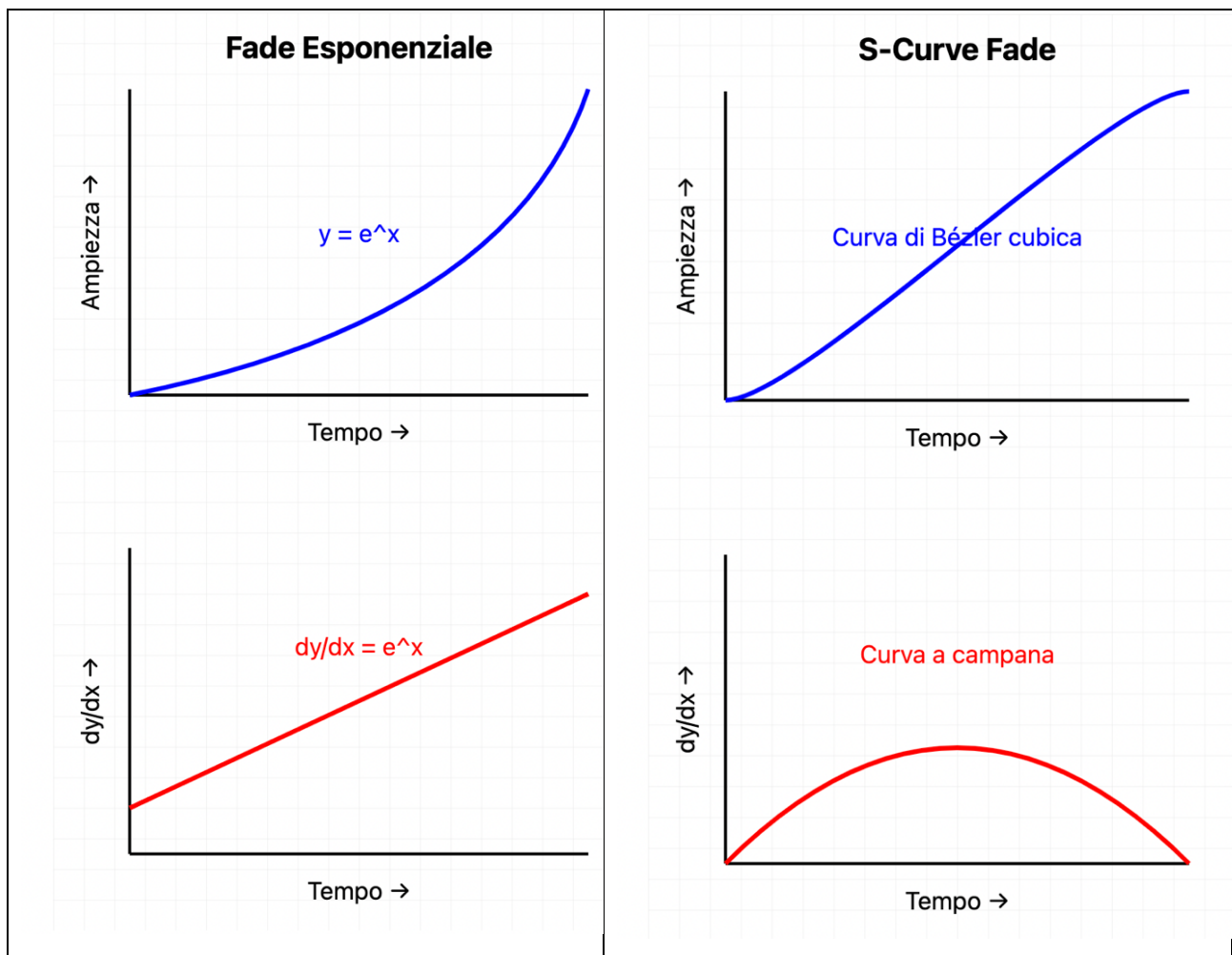


Figura 9; Fades esponenziali e S-Curve

Nell'immagine seguente l'applicazione pratica sui Fade nel software Apple™ Logic ProX 11.

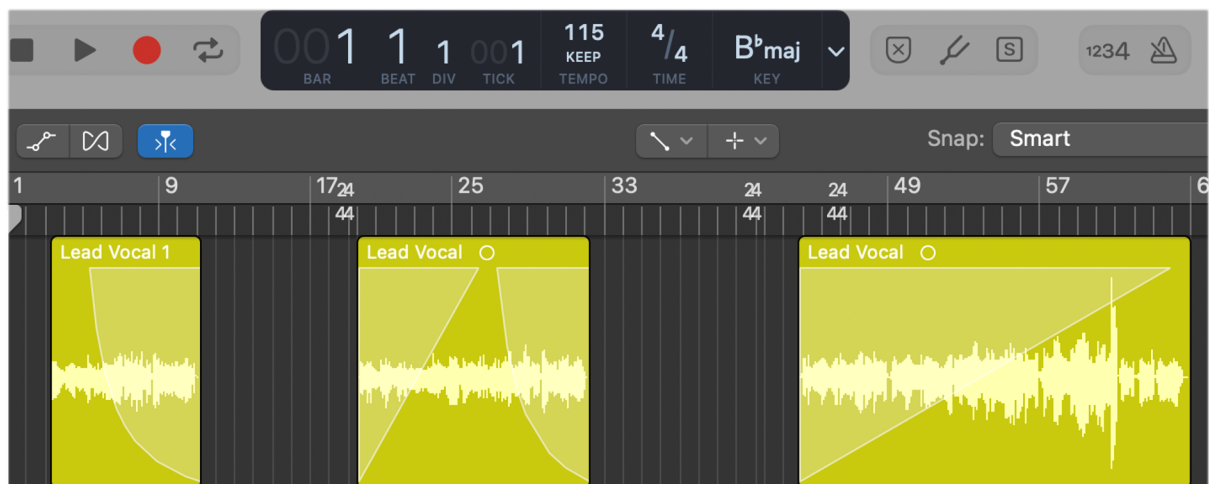


Figura 10: fades applicati a regioni con l'audio su Logic X

2.3 Applicazioni e implicazioni filosofiche del calcolo

La storia della civiltà umana non sarebbe stata la stessa senza Leibniz; con la sua visione del mondo egli ha influenzato molteplici campi.

Ad esempio, fu Leibniz a sostenere che *“invece di controllare se una formula è sempre vera basti vedere se a volte è falsa”*. Cercando un controesempio, se non se ne trovano allora la formula è una tautologia. Diversamente ci troveremo di fronte ad *“implicazioni che rendano vere le ipotesi e falsa la conclusione”*.

Era il 1679 ed il testo esatto dice:” *Se vogliamo sapere se una certa figura [sillogistica] sia valida in virtù della sola forma, vedremo se la negazione della conclusione è compatibile con le premesse; vale a dire se si possono trovare numeri che soddisfano simultaneamente le premesse e la negazione della conclusione. Perché se non si possono trovare, allora l’argomento concluderà in virtù della forma*”.¹⁸

La cosiddetta *“anticipazione della decidibilità”* in informatica è la definizione di un concetto noto, esso è un approccio computazionale che rappresenta uno dei primi esempi di *“formalizzazione logica”*.

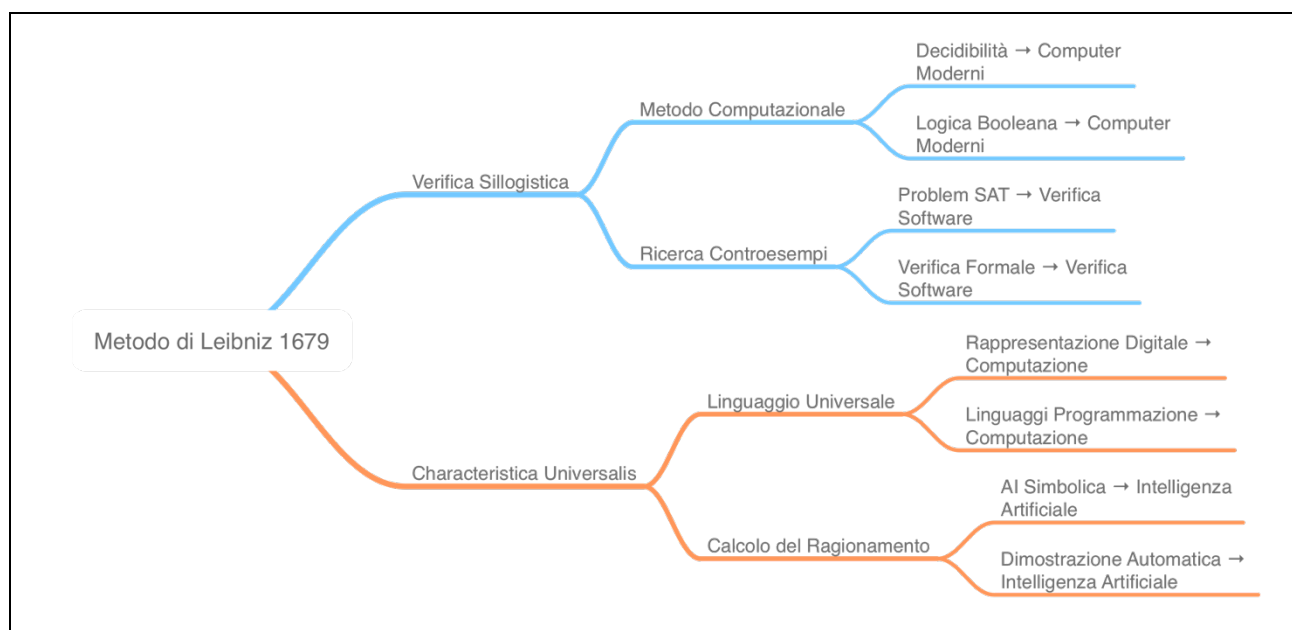


Figura 11: Verifica sillogistica e Characteristica universalis

¹⁸ Gottfried Leibniz, Numeri caratteristici Latine Graece Hebraice expressi, in Id. Säm-diche Schriften und Briefe, serie vi (Philosophische Schriften), vol. 4 (1677-1690), p. 256.

Leibniz individua un modo “*meccanico*” per verificare la validità di un sillogismo e cercare “*numeri che soddisfano*” fa da precursore al pensiero logico matematico e anticipa di fatto il concetto di decidibilità: ovvero è vero se esiste una procedura per risolverlo. Questo metodo prefigura la logica booleana, diffusasi solo dal XIX secolo, i metodi di decisione automatica dei teoremi, ed il SAT in informatica¹⁹.

Questo approccio è simile ai moderni metodi di verifica formale ed il suo tentativo è stato fondamentale per lo sviluppo dell’informatica. Ridurre il ragionamento logico a calcolo numerico, infatti, ha aperto le porte alla “*codifica di Gödel*”, alla rappresentazione digitale dell’informazione ed ai linguaggi di programmazione formali²⁰. In matematica, logica, informatica e linguistica, un linguaggio formale viene definito come “un insieme di stringhe costruite su un alfabeto finito di simboli o caratteri”.

L’idea, di rappresentare il ragionamento mediante manipolazioni simboliche è alla base dei linguaggi di programmazione, dei sistemi di dimostrazione automatica e dell’intelligenza artificiale generativa, e la sua visione è stata fondamentale ed oggi è estremamente rilevante, nell’era dei computer quantistici e dell’AI²¹, perché il confine tra ragionamento simbolico e computazione numerica rappresenta un’area di ricerca in pieno sviluppo ed attività.

¹⁹ SAT concetto di soddisfacibilità

²⁰ Frege, G. (1879). Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Verlag von Louis Nebert.

²¹ AI Artificial Intelligence

3. Leibniz e la musica

“La musica è un nascosto esercizio di aritmetica dell'anima che non sa di star contando”.

È proprio di Leibniz questa frase. Egli scrisse infatti *"Music is a hidden arithmetic exercise of the soul unaware of its act of counting"* (*"Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi"*), frase riportata in una lettera scritta al grande matematico prussiano Christian Goldbach del 17 aprile 1712, in latino, con cui aveva ampi scambi epistolari che coprivano non solo la matematica ma anche filosofia e diverse tematiche. La lettera, reperibile nell'edizione critica delle opere di Leibniz (*Sämtliche Schriften und Briefe*) pubblicata dall'Accademia delle Scienze di Berlino-Brandeburgo, contiene la frase simbolo di tutto il pensiero di Leibniz relativo alla musica ovvero l'intima connessione tra suono, forma e numero. Leibniz descrisse e sintetizzò quanto, da secoli è stato detto da Platone, Pitagora, Cassiodoro, Agostino. L'intimo legame tra suono, forma e numero si manifesta ovunque nella storia della musica e dell'acustica musicale e degli spazi.

Ecco una parte della traduzione realizzata dal sottoscritto in cui Leibniz intuisce che il sistema uditivo degli animali è differente dal nostro e che se volessimo ascoltare i suoni che si scambiano insetti e/o topi, pipistrelli ed altri animali potremmo essere danneggiati.

a Christian Goldbach (17 aprile 1712):

[Dutens III, p437]

“Non è impossibile che da qualche parte esistano animali che hanno una sensibilità musicale maggiore della nostra e che siano deliziati da proporzioni musicali che a noi a malapena toccano. Ma penso che se i nostri sensi fossero molto più acuti, questo ci danneggerebbe più che beneficiarci, poiché percepiremmo molte cose spiacevoli attraverso la vista, l'olfatto e il tatto; inoltre, coloro che hanno una straordinaria acutezza dei sensi nella musica sono disturbati da certe note errate che non sono del tutto evitabili nella costruzione di strumenti pratici, note che tuttavia solitamente non disturbano il pubblico. Nella musica, non contiamo oltre il cinque, proprio come quelle persone che, anche in aritmetica, non procedono oltre il tre, e per le quali vale il detto tedesco su un uomo semplice: "er kan nicht über drey zehlen" [non sa contare oltre il tre]. Infatti, tutti i nostri intervalli usuali sono composti da rapporti tra coppie dei numeri primi 1, 2, 3 e 5. Se avessimo un po' più di acutezza, potremmo procedere fino al numero primo 7. E penso che esistano realmente persone così. Di conseguenza, gli antichi non evitavano completamente il numero 7. Ma difficilmente ci sarà qualcuno che procederà fino ai numeri primi [successivi] più vicini, 11 e 13.

Inoltre, penso che la ragione della consonanza debba essere ricercata nella congruenza dei battiti. La musica è un esercizio “ di aritmetica in cui la mente non è consapevole di star contando. Infatti, nelle percezioni confuse o insensibili, la mente fa molte cose che non può notare attraverso una distinta appercezione. In verità, si sbagliano coloro che pensano che non accada nulla nell'anima di cui essa non sia cosciente. Pertanto, anche se l'anima non si rende conto di star contando, sente comunque l'effetto di questo calcolo insensibile, cioè il piacere nelle consonanze che ne derivano o il fastidio nelle dissonanze. Il piacere infatti nasce da molte congruenze insensibili. In generale, tuttavia, [Dutens III, p438] coloro che attribuiscono all'anima solo le operazioni di cui è cosciente, valutano la questione in modo errato. Da ciò sono sorti molti errori, commessi non solo dagli antichi filosofi ma anche dagli stessi Cartesiani e da altri filosofi più recenti, come Locke e Bayle. Ma tornando all'argomento in questione, nell'ottava il secondo colpo di una delle serie di colpi coincide con ogni colpo dell'altra serie. Nella quinta, ogni terzo di una serie e il secondo dell'altra sono in accordo. Si può dire che i poligoni regolari del cerchio e altri corpi dello stesso tipo sono stati usati dal molto acuto Keplero ἀπροσδιόνυσα [inappropriatamente], poiché non si riferiscono all'aritmetica dei numeri razionali.

Non penso che i rapporti irrazionali siano piacevoli all'anima in sé stessi, eccetto quando non sono molto distanti da quelli razionali che sono piacevoli; per accidente, tuttavia, le dissonanze sono talvolta piacevoli, e sono utilmente impiegate, e sono interposte nelle cose gradevoli come le ombre nell'ordine e nella luce, affinché possiamo poi provare ancora più piacere nell'ordine. Il tuo amico, il cui scritto mi hai comunicato, e che vuole tagliare il monocordo nel rapporto estremo e medio, scoprirà in realtà che gli intervalli che allora appaiono al nostro senso quasi coincidono con la sesta maggiore e minore; cioè, se AB sta a BC come BC sta a CA, gli intervalli saranno approssimativamente:

A-----B,

C

come

AB, 8, sesta minore

BC, 5

CA, 3 sesta maggiore

Sono quindi sufficientemente vicini, come 809, 500, 309, supponendo che $\sqrt{5}$ sia 2,236 o $2\,236/1000$; sono espressi accuratamente come $\sqrt{5} + 1$, 2, $\sqrt{5}-1$, e mentre $\sqrt{5}$ (che è certamente irrazionale) è un po' più grande di 2,236, l'errore è più piccolo di $1/1000$ (ACB). Di conseguenza, se qualcosa è piacevole in questa divisione, lo deriva da questi intervalli vicini”.

È interessante scoprire la sua padronanza relativa a tante sfumature non solo della musica ma dell'acustica e della psicoacustica. Enormi connessioni tra differenti discipline. E queste connessioni dopo Pitagora hanno continuato ad evolversi attraverso le elaborazioni zarliniane del Rinascimento. Esse si trovano ovunque, anche negli studi sugli intervalli e la loro divisione (i diversi temperamenti), nelle differenti accordature, nel campo dell'acustica e nelle relative ricerche scientifiche che hanno permesso lo sviluppo e la costruzione degli strumenti musicali come li conosciamo oggi. Nell'era moderna, quando con l'avvento della generazione elettronica del suono, queste relazioni essenziali tra le differenti proprietà matematiche, fisiche e del suono le ritroviamo in ogni composizione elettroacustica ed in ogni sistema di produzione e diffusione audio, in ogni software musicale, nei filtri, negli equalizzatori e nei plugins delle DAW. Di seguito un equalizzatore parametrico con frequenze, fattore di merito e guadagno variabili. Senza il calcolo infinitesimale ed i concetti di derivazione ed integrazione, non avrebbe mai funzionato.

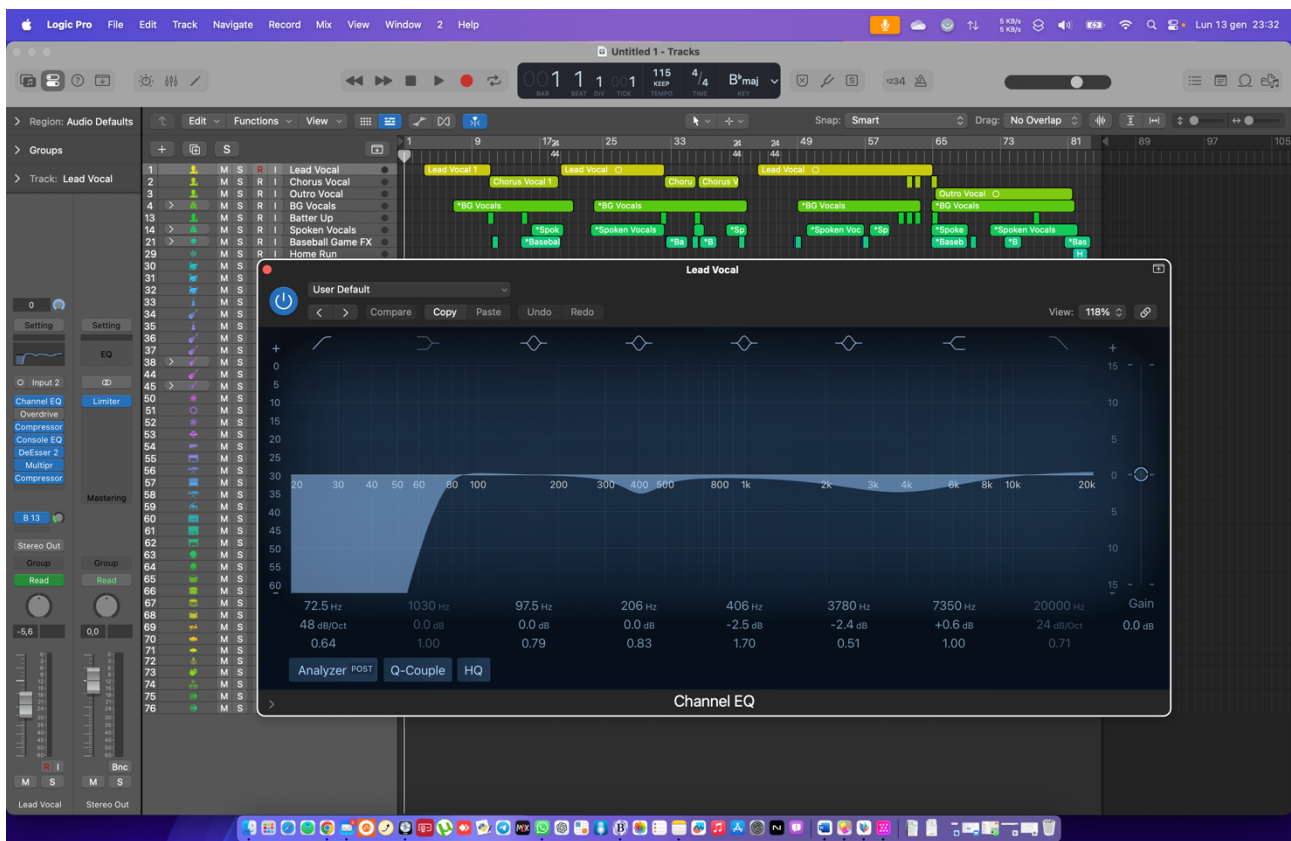


Figura 12: Equalizzatori parametrici con frequenza, ampiezza, tipologia e fattore di merito variabile

3.1 L'interesse di Leibniz per la teoria musicale

Leibniz aveva ben presto intuito ed analizzato cosa accade nella mente di un musicista ma anche in chi ascolta. Ma che calcoli compie un musicista e quanti di questi sono coadiuvati dalla memoria procedurale e quali del calcolo predittivo? Pensiamo al tempo espresso da numeratore e denominatore di una frazione. Il numero dei movimenti nei tempi semplici (quelli con suddivisione binaria) sono espressi proprio dal numeratore mentre la durata di ogni movimento è espressa dal denominatore.

Immaginiamo una corda di lunghezza x . Quest'ultima verrà rappresentata come intero e utilizzeremo una semibreve per rappresentarla, ovvero il valore di $4/4$. Se ci poniamo al centro della corda avremo la sua metà che varrà $2/4$ e chiameremo minima, pertanto dovremmo utilizzare due minime per raggiungere la "lunghezza" di una semibreve. Continuando in questo modo se questa metà che chiamiamo minima verrà ulteriormente divisa in due parti uguali avremo due semiminime, che varranno $1/4$ l'una. Se ogni semiminima verrà divisa in due avremo due crome e varranno $1/8$ l'una. Se ogni croma verrà divisa in due avremo due semicrome che valgono $1/16$ l'una. Possiamo continuare dividendo ogni semicroma in due biscrome ($1/32$ l'una) ed ogni biscroma in due semibiscrome ($1/64$ l'una). Potremmo continuare con ulteriori figure (quintuple etc.) e ciò è valido sia per i suoni che per le pause. Ma la matematica presente su uno spartito non finisce qua. Esistono dei segni che prolungano il suono, ad esempio le legature di valore che sono un autentico segno + per la durata degli eventi musicali. Poi ci sono i punti di valore, semplice, doppio e triplo. Ogni punto di valore allunga la durata della figura musicale accanto a cui è posto della metà (semplice), della metà e della metà della metà (punto doppio) e della metà, della metà della metà e della metà della metà della metà. Sembra cervellotico ma con i numeri possiamo comprenderlo meglio.

Semibreve = $4/4$ Semibreve con il punto = $6/4$ Semibreve con due punti: $7/4$

Sempre in partitura abbiamo le indicazioni relative alle tonalità. Esse sono organizzate secondo la posizione di diesis e bemolle all'inizio del rigo subito dopo la chiave. Sono disposte seguendo il noto circolo delle quinte per i diesis (#) e delle quarte per i bemolli (b). Questa struttura costruttiva nasconde una particolare sequenza. Partendo da qualsiasi nota del sistema temperato le distanze in termini di intervalli musicali restano le stesse all'interno della scala musicale, della sua organizzazione melodica (organizzazione orizzontale) e in quella armonica (organizzazione verticale). Si parte dal tetracordo greco T T S (Tono, Tono, Semitono) e se ne dispongono in fila due, intervallati dal *Tono di giunzione*. Il risultato è T T S T T T S. Se lo si applica ad ogni nota si avranno scale in *tonalità* differenti e procedendo per quinte ascendenti, ovvero intervalli di sette semitoni ci

ritroveremo ad avere un sistema molto efficace di scale in tonalità differenti. I toni e semitoni sono distanze tra i suoni e si chiamano intervalli. Il semitono è la distanza più piccola.

Disponendo le note secondo il metodo di creazione della scala diatonica maggiore avremo:

Do (T) Re (T) Mi (S) Fa (T) Sol (T) La (T) Si (S) Do.

Questa è nota come scala maggiore diatonica di Do. Questa scala ha sette suoni e sette gradi. Le distanze, note come intervalli sono le seguenti:

Note	Intervalli	Semitoni
Do Do	unisono	0 semitoni
Do Re	intervallo di seconda maggiore	2 semitoni
Do Mi	intervallo di terza maggiore	4 semitoni
Do Fa	intervallo di quarta giusta	5 Semitoni
Do Sol	intervallo di quinta giusta	7 semitoni
Do La	intervallo di sesta maggiore	9 semitoni
Do Si	intervallo di settima maggiore	11 semitoni

Tutto ciò si ripete con note differenti se la struttura scalare è immutata

Scala di Sol Maggiore

Sol (T) La (T) Si (S) Do (T) Re (T) Mi (T) Fa# (S) Sol

In questo caso per rispettare le distanze della struttura scalare predefinita quello che verrà fuori è l'aggiunta del diesis alla nota Fa. Ma guardando la tabella seguente si nota che esiste un sistema di calcolo senza dover ricostruire l'intera scala. Ed è questo che usano i musicisti con la loro mente dedita spesso inconsciamente al calcolo matematico in pochi millisecondi, infatti, il cervello comprende che da zero alterazioni della scala di Do Maggiore, procedendo per quinte (DO SOL – SOL RE – RE LA – La Mi – Mi Si – Si Fa# - Fa# Do#) e aggiungendo un diesis ad ogni quinta partendo dal Fa# della scala di Sol Maggiore si calcolano le alterazioni di tutte le altre scale diatoniche maggiori. Avremo, utilizzando per comodità la notazione internazionale:

A	B	C	D	E	F	G	A
LA	SI	DO	RE	MI	FA	SOL	LA

CIRCOLO DELLE QUINTE: DO SOL RE LA MI SI FA# DO#

Tonalità	DO	SOL	RE	LA	MI	SI	FA#	DO#
Alterazioni	0	1	2	3	4	5	6	7

In realtà volendo è possibile tornare al Do e chiudere il cerchio ma andrebbero inserite in chiave le doppie alterazioni (non esistono solo i diesis ed i bemolli che aggiungono o tolgono un semitono alle note ma anche doppi diesis che aggiungono due semitoni alle note e doppi bemolli che sottraggono due semitoni alle note). In tal caso avremo SOL# RE# LA# MI# SI# DO.

CIRCOLO DELLE QUARTE: DO FA Sib Mib Lab Reb Solb Dob

Tonalità	DO	FA	Sib	Mib	Lab	Reb	Solb	DOb
Alterazioni	0	1	2	3	4	5	6	7

Con lo stesso principio inserendo le doppie alterazioni: Fab Sibb Mibb Labb Rebb = Do.

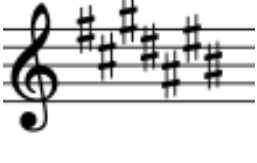
In questo modo si può coprire l'intero arco cromatico delle scale maggiori.

Omofoni							x	
Tonalità	DO	SOL	RE	LA	MI	SI	FA#	DO#
Alterazioni	0	1	2	3	4	5	6	7
Tonalità	DO	FA	Sib	Mib	Lab	Reb	Solb	DOb
Alterazioni	0	1	2	3	4	5	6	7

Ton. #	DO	DO#	RE	RE#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI
Ton. b		REb		Mib			SOLb		LAB		Sib	
Alt.	0	5b	2#	3b	4#	1b	6#/6b	1#	4b	3	2b	5
Scelta	DO	REb	RE	Mib	MI	FA	FA#/SOLb	SOL	LAB	LA	Sib	SI

CIRCOLO DELLE QUINTE

			
Do Maggiore	Sol Maggiore	Re Maggiore	La Maggiore
C D E F G A B C	G A B C D E F# G	D E F# G A B C# D	A B C# D E F# G# A

			
Mi Maggiore	Si Maggiore	Fa# Maggiore	Do# Maggiore
E F# G# A B C# D# E	B C# D# E F# G# A# B	F# G# A# B C# D# E# F	C# D# E# F# G# A# B# C#

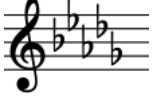
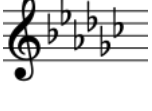
Notiamo che questo sistema oltre ad aggiungere un diesis, a destra del precedente, ci indica la tonalità della scala semplicemente aggiungendo mentalmente un semitono al diesis più a destra. Il diesis più a destra nella scala di Re Maggiore è quello di Do#. Nella scala di Re Maggiore abbiamo Fa# e Do#. Un musicista guarderà i due diesis e potrà fare affidamento sulle sue esperienze e sullo studio e saprà che i due diesis sono proprio della scala di Re ma se vorrà fare affidamento esclusivamente sul calcolo matematico aumenterà di un semitono l'ultimo diesis più a destra e si troverà nella tonalità di Re Maggiore allo stesso modo.

Tutto ciò si ripete in modo analogo nel circolo delle quarte tenendo conto di alcune piccole differenze. Per individuare rapidamente la tonalità si esclude l'ultimo bemolle più a destra e leggendo la posizione sul pentagramma del bemolle individuato si ottiene la tonalità.

Se ad esempio abbiamo due bemolli essi sono sicuramente Sib e Mib perché si essi si trovano ad una distanza di quarta. Si esclude il Mib guardando il pentagramma ed ecco svelata la tonalità. Siamo infatti in Si bemolle maggiore.

CIRCOLO DELLE QUARTE

			
Do Maggiore	Fa Maggiore	Sib Maggiore	Mib Maggiore
C D E F G A B C	F G A Bb C D E F	Bb C D Eb F G A Bb	Eb F G Ab Bb C D Eb

			
Lab Maggiore	Reb Maggiore	Solb Maggiore	Dob Maggiore
Ab Bb C Db Eb F G Ab	Db Eb F Gb Ab Bb C Db	Gb Ab Bb Cb Db Eb F Gb	Cb Db Eb Fb Gb Ab Bb Cb

Questi non sono gli unici calcoli che fa un musicista perché non dimentichiamo che è vero che le note sono scritte sul pentagramma e si impara la loro posizione ma le chiavi utilizzate più diffuse sono 7, Violino, Basso, Baritono, Soprano, Mezzo Soprano, Contralto e Tenore. E chiave sta per chiave di lettura, ovvero tutti i nomi delle note cambiano se si cambia la chiave. Ed un musicista riesce a leggerle tutte agilmente. Alcune indicano la posizione del Fa, altre del Do centrale e quella di violino la posizione del Sol.

Chiave di Sol	Chiave di Fa	Chiave di Fa	Chiave di Do	Chiave di Do	Chiave di Do	Chiave di Do
Violino	Basso	Baritono	Soprano	Mezzo Soprano	Contralto	Tenore
						

Le chiavi suindicate necessitano del pentagramma per poter definire il nome delle note ed un musicista sa che quella nota è Do centrale per tutte e sa anche che le diverse chiavi servono per evitare

tagli aggiuntivi multipli per operare in zone di frequenze inerenti ad estensioni vocali e strumentali diverse²².

Ecco le tavolozze riassuntive di Musescore 4, un software open source per la video scrittura musicale. Si comprende analizzandole che la musica è lingua oltre ad essere linguaggio e permette una perfezione degna dell'estasi che produce nelle nostre menti e cuori.

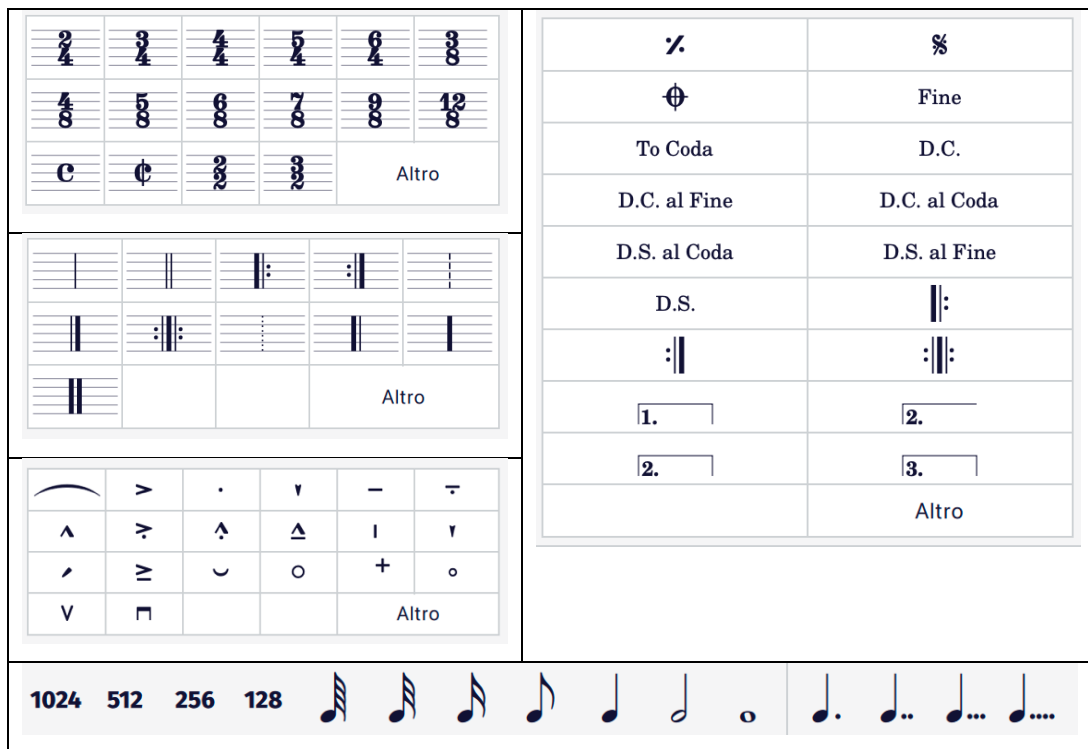


Figura 13: Tavolozza del Software Open Source: Musescore 4

Analizzando la tavolozza delle durate musicali si nota l'interessante struttura matematica, dove ogni figura musicale è la metà della precedente creando una progressione geometrica con rapporto $r=1/2$. In realtà il valore di ogni figura musicale può essere inteso come $1/2^n$ dove n è la posizione nella sequenza.

È chiara l'analogia tra la progressione geometrica della divisione e suddivisione ritmica e la struttura esponenziale delle ottave (nella costruzione del pianoforte e degli altri strumenti musicali in genere).

²² Di Natale, Corduas, Cusano, Maggiore, (2000). Crescendo. Carisch

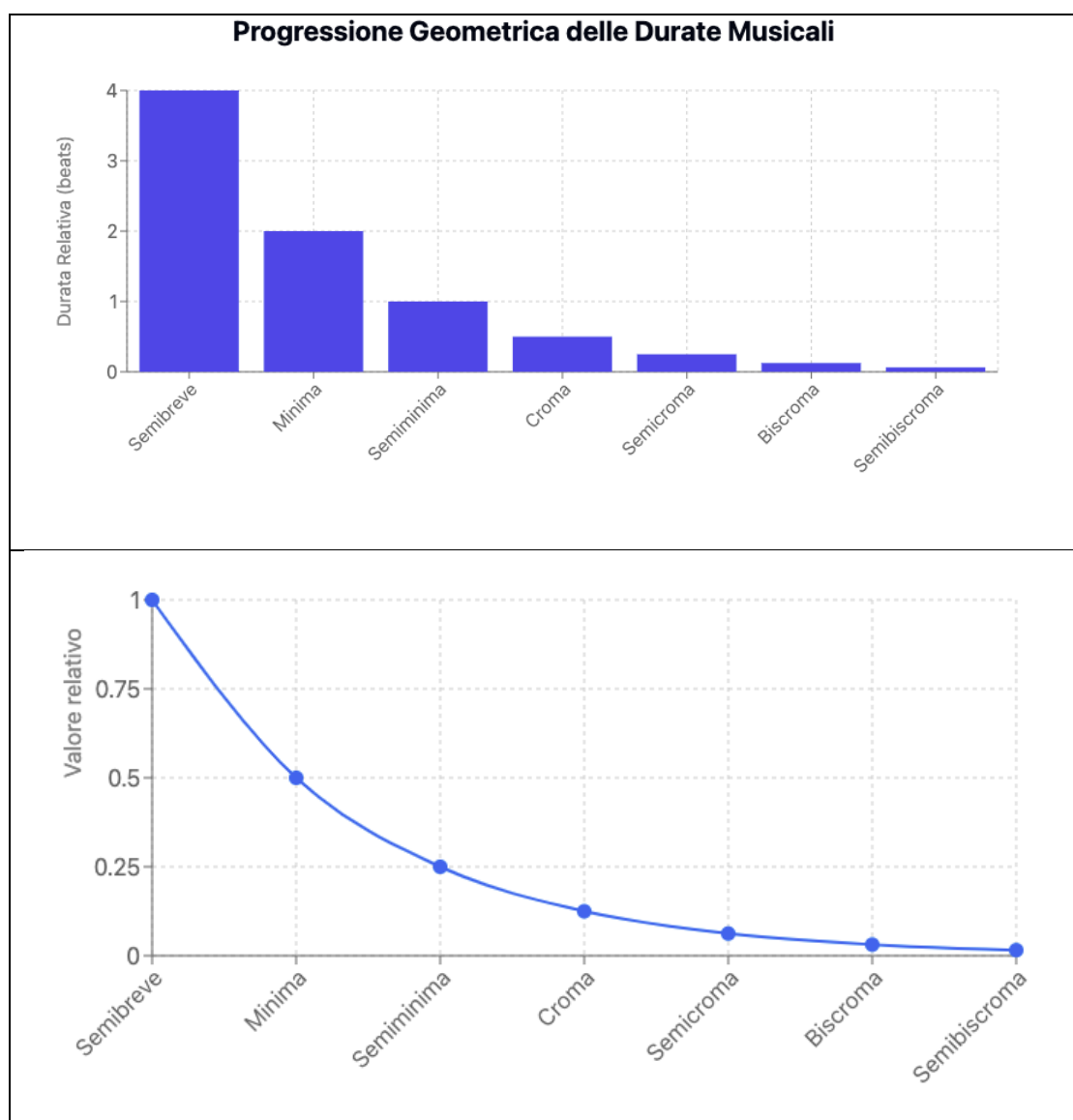


Figura 14: Progressione geometrica delle durate musicali

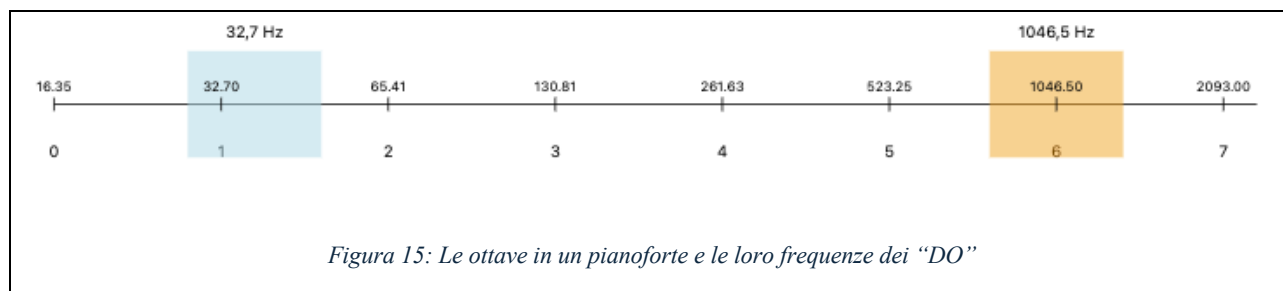
Tabella dei valori

Figura musicale	Durata relativa	Beats
Semibreve	1/1	4
Minima	1/2	2
Semiminima	1/4	1
Croma	1/8	0.5
Semicroma	1/16	0.25
Biscroma	1/32	0.125
Semibiscroma	1/64	0.0625

La suddivisione ritmica, grazie anche alla musica elettronica si estende ben oltre questi valori. Ecco una tabella estesa che tiene conto fino ai 4096esimi.

Figura musicale	Durata relativa	Beats
Quintupla (128esimi)	1/128	0.03215
256esimi	1/256	0.015625
512esimi	1/512	0.0078125
1024esimi	1/1024	0.00390625
2028esimi	1/2048	0.001953125
4096esimi	1/4096	0.0009765625

Questa struttura è da secoli utilizzata in musica ed è implicita in ogni esecuzione musicale (almeno fino all'arrivo della musica acustica e concreta del Novecento). Analizzando la tastiera del pianoforte si nota la struttura esponenziale delle ottave in quanto ogni ottava è il doppio della precedente.



Guardando un pianoforte dall'alto è possibile vedere la disposizione delle corde ed individuare forti analogie con la curva esponenziale presente nella sua struttura costruttiva²³.

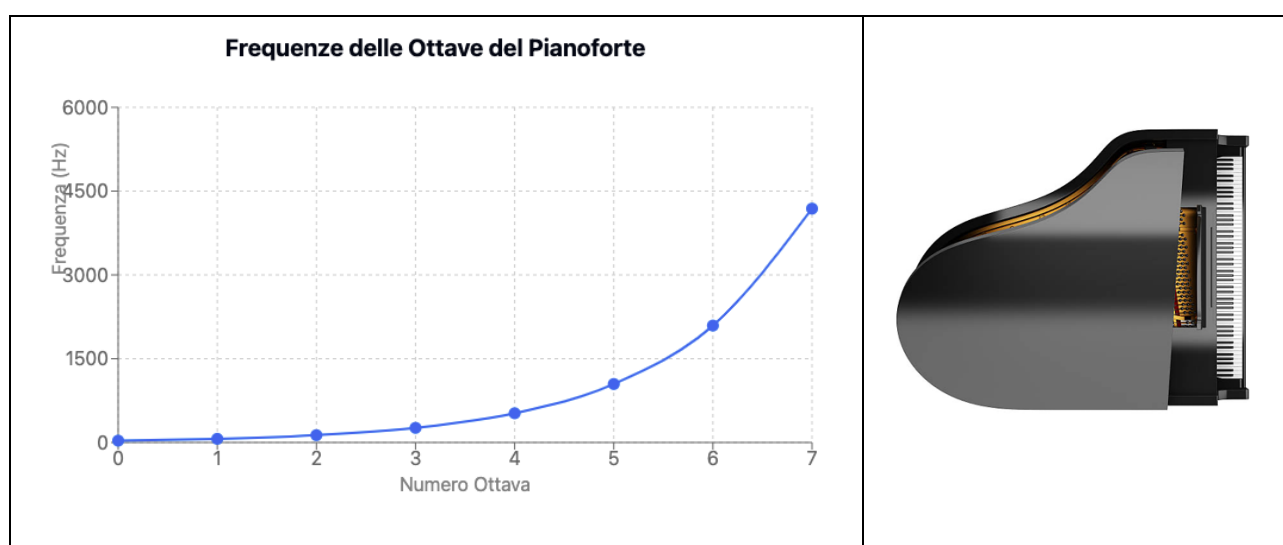


Figura 16: Le frequenze in funzione delle ottave

²³ Rosati, T. (2023). Suono elettronico: Manuale per studenti di tecnologie musicali e altri esploratori di suoni. Volontè & Co.

Possiamo notare come la forma del pianoforte sia stata pensata in questo modo per seguire proprio la struttura esponenziale delle frequenze di tutti gli ottantotto tasti.

Soffermandoci sulla produzione del suono pizzicando la corda di una chitarra, troveremo l'apporto di Leibniz ancora più evidente anche se non è il solo ad aver svelato questo enigma matematico. Immaginiamo di tendere la corda tra capotasto e ponticello. La forma, considerando anche la posizione di stasi è quella di un triangolo. La linea orizzontale nera che rappresenta la posizione di riposo della corda mentre la forma triangolare blu che mostra il movimento della corda.

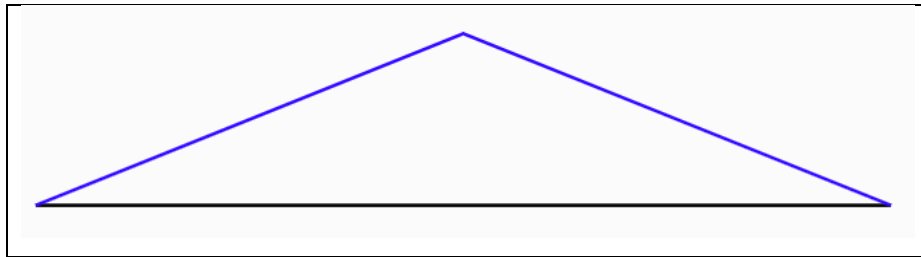


Figura 17: Forma "intuitiva" triangolare

Essa si definisce “forma intuitiva” ma a ben vedere l'oscillazione della corda non si può indicare così ma da quella che sarebbe diventata nota come serie di Fourier. Per approfondire occorre concentrarsi sull'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\partial^2 y / \partial t^2 = c^2 * \partial^2 y / \partial x^2$$

che ha per soluzione generale:

$$y(x,t) = \Sigma [A_n * \sin(n\pi x/L)] * \cos(n\pi ct/L)$$

dove $y(x,t)$ è lo spostamento verticale della corda nel punto x al tempo t , $c = \sqrt{T/\mu}$ è la velocità di propagazione dell'onda (T tensione, μ densità lineare), L è la lunghezza della corda, n è il numero del modo di vibrazione ($n = 1$ fondamentale, $n = 2, 3, \dots$ armoniche), A_n sono i coefficienti di Fourier che determinano l'ampiezza di ogni modo, così definiti oltre cento anni dopo.

La sequenza storico-temporale dello studio dell'equazione differenziale della corda come vedremo in seguito è importantissima. Ecco quello che si genera in istanti differenti.

Come esempio sono stati campionati i momenti relativi alla fondamentale, prima armonica e seconda armonica.

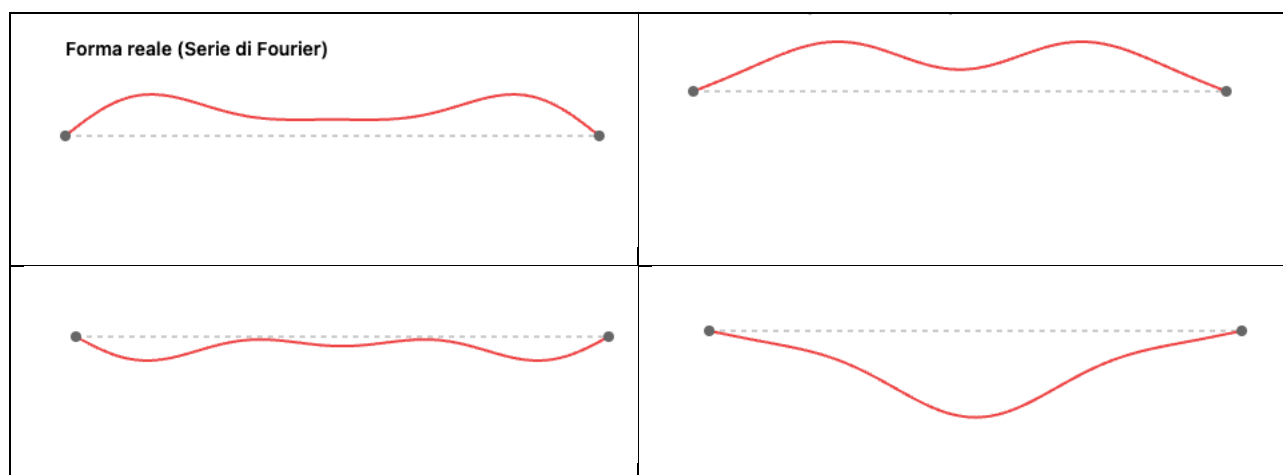


Figura 18: Forma reale dell'oscillazione della corda secondo la Serie di Fourier

Leibniz, attraverso il calcolo infinitesimale, permise di descrivere il moto della corda come “*somma infinite di armoniche*”. Il suo contributo è stato fondamentale perché ha permesso matematicamente la descrizione del moto continuo portando alla comprensione che il movimento della corda può descriversi come somma infinita di onde sinusoidali (diventando in seguito appunto serie di Fourier). La forma dell'oscillazione della corda tiene conto della frequenza fondamentale, delle infinite armoniche nate da multipli della fondamentale e del decadimento in ampiezza delle armoniche superiori. Pertanto, il contributo di esse diventa minore al crescere con la frequenza. Ovviamente vi sono tanti altri fattori che contribuiscono alla produzione e alla diffusione del suono nello strumento ma non sono oggetti di questo lavoro.

Dietro questo fenomeno di oscillazione della corda vi è l'equazione del moto continuo, descritta come una equazione differenziale. La matematica leibniziana ci permette di comprendere che la sua soluzione è una serie infinita di termini sinusoidali dove ogni termine è un modo di vibrazione della corda. La soluzione è pertanto una somma infinita di modi normali di vibrazione. Ciò ha rappresentato un faro oltre che per la musica anche per la fisica delle onde. Le armoniche sono responsabili della definizione del timbro di ogni oggetto sonoro. Leibniz ha fornito gli strumenti matematici per scrivere questa equazione; tuttavia, non arriva a sviluppare il concetto di “*serie armonica*” come lo intendiamo oggi. Fu d'Alembert a trovare la prima soluzione dell'equazione della corda vibrante introducendo difatti l'“*equazione delle onde*”:

$$\partial^2 y / \partial t^2 = c^2 * \partial^2 y / \partial x^2$$

Daniel Bernoulli²⁴ proporrà poi che la soluzione sia una somma di modi normali di vibrazione ma non riuscirà a dimostrarlo matematicamente in modo rigoroso ed infine dobbiamo attendere Fourier

²⁴ 1753

all'inizio 1800 che sviluppa il concetto di serie trigonometriche e introduce i coefficienti A_n che permettono di scomporre qualsiasi funzione periodica in somma di seni (e coseni) e fornisce il metodo matematico per calcolare questi coefficienti. Oggi la trasformata di Fourier tenendo conto di tutto l'apporto dei matematici prima di lui, permette di “vedere” sullo schermo dei nostri computer e nelle Digital Audio Workstations forme d'onde molto complesse (DFT e FFT).



Figura 19: Trasformata Discreta di Fourier

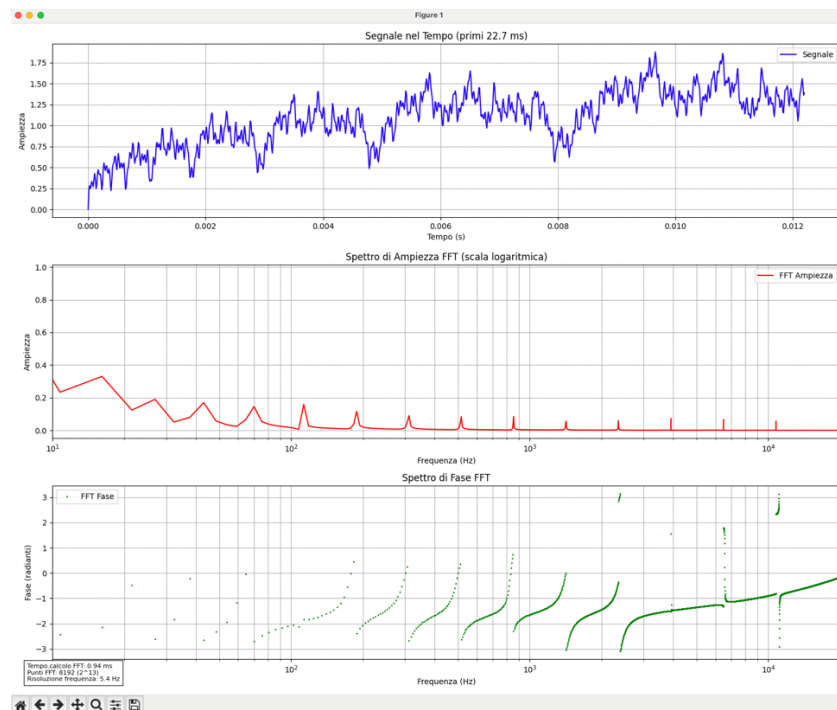


Figura 20: Trasformata veloce di Fourier

3.2 La musica come espressione dell'armonia universale

Un musicista ha una mente che processa relazioni matematiche complesse, in modo anche inconscio durante l'esperienza estetica. Questo è ciò che ha osservato e intuito Leibniz. Oggi possiamo andare oltre perché l'intuizione e l'osservazione di Leibniz sono state particolarmente significative, egli era un matematico ed un filosofo, ed un fine conoscitore dell'infinitamente grande nell'infinitamente piccolo. La sua visione metteva insieme l'aspetto matematico-tecnico della musica con l'aspetto estetico-emotivo. In sintesi, quando facciamo musica (ma anche quando l'ascoltiamo) la nostra mente compie calcoli matematici che vanno ben oltre ogni immaginazione. E spesso non ne siamo affatto consapevoli.

Intuire da dove è iniziato tutto vuol dire necessariamente occuparsi di Pitagora²⁵. La scala pitagorica è tra i più antichi sistemi conosciuti di costruzione delle scale musicali. In realtà il sistema è molto più antico di Pitagora (570-80 a.C. 495 a.C. circa) ma porta il suo nome perché è stato lui ad individuare la matematica alla base del procedimento costruttivo. Si narra che Pitagora scoprì i rapporti tra i suoni armonici passando nei pressi di una fucina. Attratto dalla strana sonorità si avvicinò e scoprì che vi erano quattro martelli in precisi rapporti di grandezza e che il quinto che non rispettava le proporzioni aveva un suono totalmente differente dagli altri. Questo quinto martello fece intuire a Pitagora che le masse dei martelli erano in rapporti di numeri semplici tra loro e giunse alla conclusione che i suoni consonanti ed i rapporti numerici semplici sono strettamente correlati. Tra le prime dimostrazioni delle correlazioni tra musica e matematica vi è quindi quella che portò alla costruzione della scala per rapporti interi.

Come Pitagora possiamo applicare questa teoria alle corde e otterremo che se facciamo vibrare una corda avremo una frequenza (il numero di oscillazioni al secondo) fondamentale da cui verranno individuati tutti gli altri intervalli dei suoni armonici semplicemente seguendo la formula:

f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f, 7f, 8f, 9f, 10f, 11f, 12f, 13f, 14f, 15f, 16f, 17f e così via ...

²⁵ Il semitono pitagorico è 256:243 Maor, E. (2018, p. 75). Music by the numbers: From Pythagoras to Schoenberg. Princeton University Press

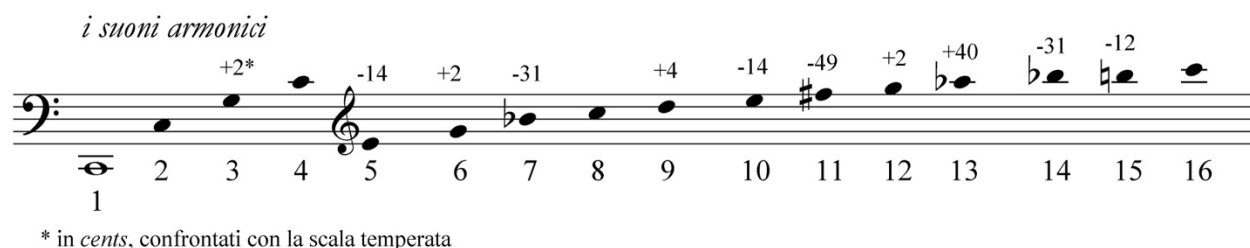


Figura 21: Gli armonici naturali con i relativi riferimenti rispetto al sistema temperato

Il volume di ogni singolo armonico ci permette come secoli dopo ha dimostrato Fourier che ogni onda complessa è la sovrapposizione di sinusoidi semplici. Sinusoidi sì, perché alla base di ogni suono vi sono sinusoidi.

Immaginiamo un punto che ruoti su una circonferenza; se quel punto in un secondo compie una rotazione completa avremo la frequenza di 1 Hz. Se quella oscillazione supera i 20 Hz la sentiremo fino al limite superiore del nostro organo uditivo: 20 KHz. La sua proiezione nel tempo genererà una funzione seno ($y = \sin x$) e tutti i multipli creeranno onde complesse ($y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin(n)x$). Avremo così creato quella che nella sintesi sonora si chiama sintesi additiva a spettro armonico.

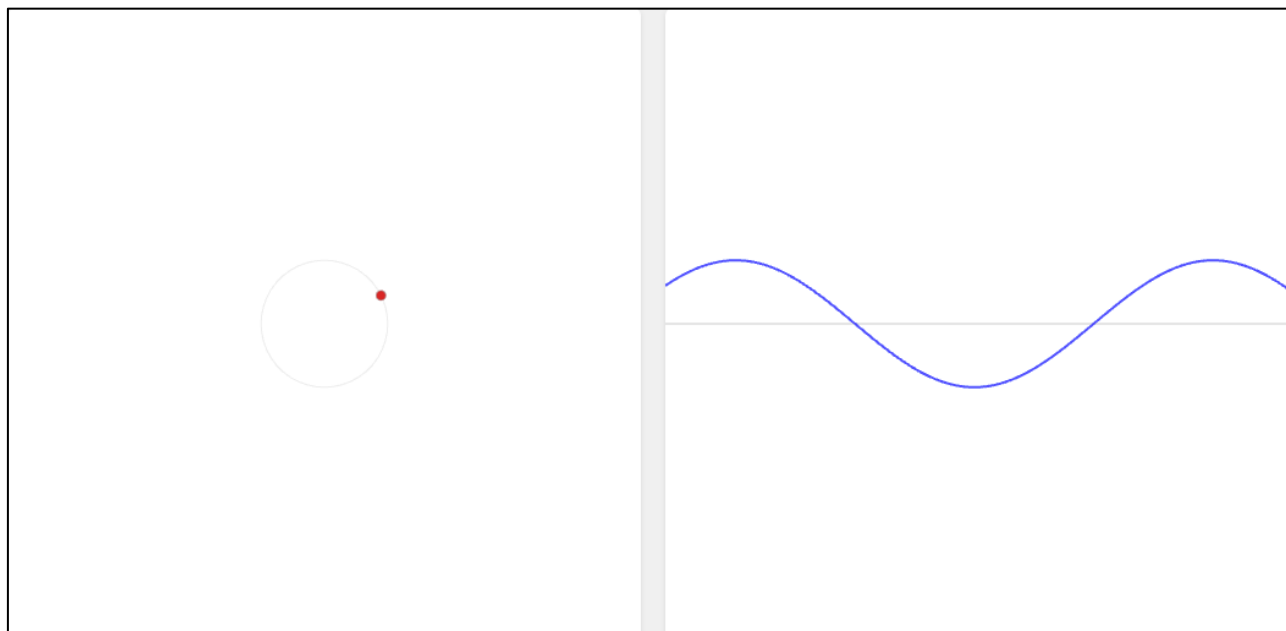


Figura 22: Relazione tra moto circolare uniforme (a sinistra) e moto armonico semplice (a destra): la proiezione del punto P sulla circonferenza genera una sinusoidale quando rappresentata in funzione del tempo.

È notevole il fatto che la spirale logaritmica che nasce dai rapporti armonici la ritroviamo in natura finanche nei bracci delle galassie a spirale (spirale di densità) dando origine ad interessanti ed

affascinanti associazioni. La spirale logaritmica si manifesta in numerosi esempi in natura, particolarmente dove la crescita segue un pattern matematicamente regolare.

L'equazione che la genera è $r = ae^{b\theta}$. Difatti la spirale logaritmica è una curva che viene definita in coordinate polari dove: r è la distanza dal centro della spirale, θ è l'angolo in radianti, a è la costante che scala la spirale (essa determina la distanza dal centro della spirale) e b è un parametro che determina con quanta velocità la spirale si allontana dalla sua origine. Tuttavia, ciò che stiamo vedendo nel grafico è nelle coordinate cartesiane e per tracciare la spirale dobbiamo convertire le coordinate polari (r, θ) in cartesiane (x, y) , pertanto $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.

Leibniz non solo studiò la geometria analitica, ma fornì contributi significativi al suo sviluppo, particolarmente nella descrizione algebrica delle curve e nell'analisi infinitesimale²⁶. Egli estese i concetti della geometria analitica cartesiana introducendo un approccio differenziale alla descrizione delle curve, che permise di studiare le loro proprietà in modo più sistematico e generale. la spirale logaritmica è un esempio di curva con proprietà speciali, come ad esempio lasciare invariato l'angolo tra il raggio vettore e la tangente.

Ecco alcuni degli esempi più affascinanti:

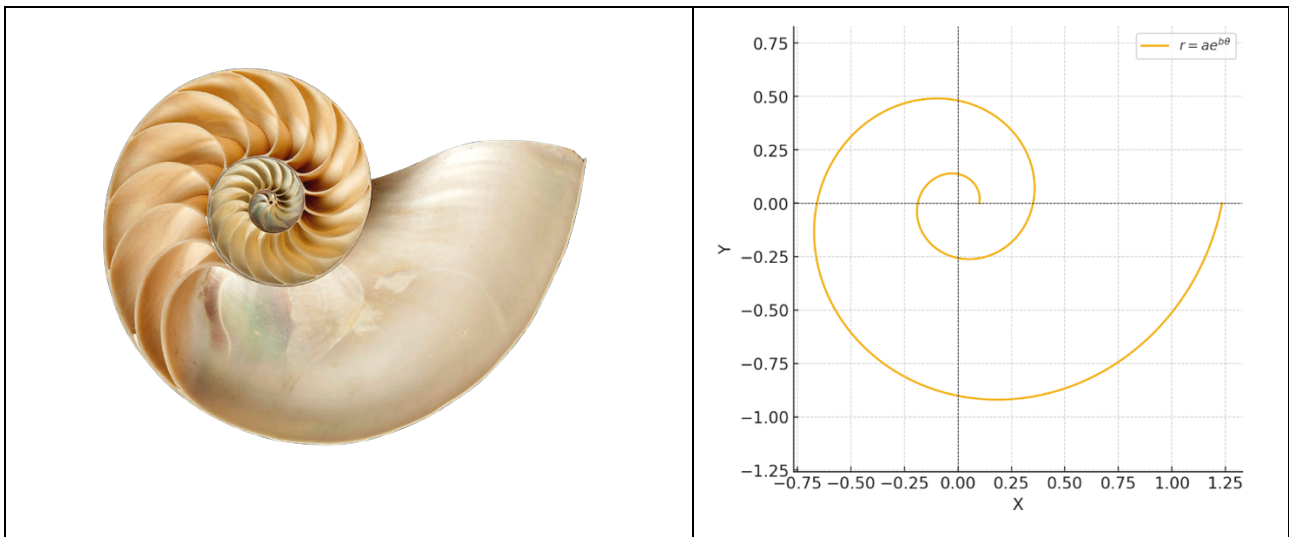


Figura 23: Analogia geometrica tra la conchiglia di *Nautilus pompilius* (a sinistra) e la spirale logaritmica (a destra). La spirale matematica, definita in coordinate polari come $r = ae^{(b\theta)}$, modella con precisione il pattern di crescita della conchiglia.

La conchiglia del *Nautilus pompilius* e di molti altri molluschi (come le lumache marine), la disposizione dei semi nel girasole, la forma delle pigne, l'arrangiamento delle foglie in numerose

²⁶ Leibniz, G. W. (1684). Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus [Un nuovo metodo per i massimi e minimi, come pure per le tangenti, che non è ostacolato da quantità fratte né irrazionali, e un singolare tipo di calcolo per questi]. Acta Eruditorum, 3, 467-473.

piante (noto come fillotassi), la forma di alcuni cavoli romaneschi, la vernazione circinnata (ovvero l'arrotolamento delle felci giovani), la struttura dei cicloni e degli uragani, alcuni tipi di formazioni nuvolose, le corna di alcuni animali come il muflone, le zanne degli elefanti, la coda del camaleonte quando arrotolata e, nel nostro sistema uditivo, la coclea.

È di fondamentale importanza descrivere qui la sequenza di Fibonacci, anche nota come “spirale aurea”. Il rapporto aureo alla base della creazione di questa spirale lo ritroviamo praticamente ovunque il nostro cervello individui qualcosa di bello, dalle carte di credito, all'uomo vitruviano di Leonardo, dal padiglione uditivo al nautilus, ed ovviamente ai suoni.

Il rapporto aureo ($\varphi \approx 1.618033988749895 \dots$) è ottenuto dalla famosa formula che governa la crescita della spirale $e^{(\theta/\varphi)}$. Questa sequenza è incredibilmente semplice ma allo stesso tempo realmente “aurea”.

Ogni numero è la somma dei precedenti.

$1 + 1 = 2$	$3 + 5 = 8$	$13 + 21 = 34$	$55 + 89 = 144$
$1 + 2 = 3$	$5 + 8 = 13$	$21 + 34 = 55$	$89 + 144 = 233$
$2 + 3 = 5$	$8 + 13 = 21$	$34 + 55 = 89$	$144 + 233 = 377$

Se proviamo a fare il rapporto tra i due numeri consecutivi otterremo come risultato sempre il numero aureo. Geometricamente questo è osservabile proprio nelle nuove “camere” della conchiglia.

Anche nella musica troviamo il rapporto aureo praticamente ovunque dalla costruzione del violino, al climax delle opere di alcuni compositori, alla disposizione dei gradi della scala musicale ed agli intervalli: $2/1$ è l'intervallo di ottava, $3/2$ è l'intervallo di quinta, $5/4$ è l'intervallo di Terza. Essi sono intervalli che il nostro orecchio considera consonanti e pertanto i viventi trovano piacere nell'ascoltare queste vibrazioni perché il nostro sistema uditivo è come se fosse “sintonizzato” su queste strutture logaritmiche dei suoni nella percezione. Perché il nostro sistema uditivo è logaritmico.

Il concetto di ottava in musica è rappresentato dal rapporto matematico di $2:1$ tra le frequenze. Quando, data una nota cosiddetta “fondamentale” viene raddoppiata la frequenza (per esempio, da 440 Hz a 880 Hz nel caso del La), il cervello, tramite l'orecchio umano la percepisce come la stessa nota all'ottava superiore. Ciò solleva anche un'importante questione sulla percezione uditiva dell'essere umano e non solo: questa progressione, interpretata come lineare seguono una funzione

esponenziale, in tal modo possiamo definire, il nostro sistema uditivo come un sistema logaritmico (l'inverso dell'esponenziale). La distribuzione dei dodici semitoni nell'ottava non segue quindi una equa divisione aritmetica nell'ottava ma qualcosa di più complesso: il sistema temperato equabile.²⁷

Nei secoli tantissimi pensatori e scienziati hanno portato diversi sistemi di divisione dell'ottava fino ad arrivare al sistema temperato. Si pone l'accento sul fatto che il rapporto tra le frequenze della scala non è lineare ma appunto logaritmico. Ogni semitono, infatti, è separato da un rapporto costante, la radice dodicesima di 2. La frequenza successiva si calcola moltiplicando la frequenza attuale per $2^{1/12}$. In tal modo in termini perfettivi il nostro cervello identifica la distanza di un semitono tra una nota e l'altra.

Il nostro cervello discerne benissimo le differenze di pochi centesimi di Hz nelle basse frequenze ma riconosce come unico suono due frequenze anche lontane centinaia di Hz sul registro dei suoni acuti²⁸. L'eccellente organizzazione della spirale logaritmica l'ha resa efficiente e ciò ha rappresentato un valido motivo per essere selezionata come sistema matematico dell'evoluzione in tanti contesti differenti.

Nel processo costruttivo della spirale di Fibonacci ogni nuovo segmento di essa è un incremento discreto ed il calcolo infinitesimale di Leibniz ci permette di studiare questi incrementi anche quando diventano infinitamente piccoli attraverso le equazioni differenziali. C'è anche un importantissimo elemento in comune: l'**autosimilarità**. È il mantenimento delle stesse proporzioni nella crescita come molte funzioni nel calcolo infinitesimale (proprietà invarianti). Notiamo infine che la spirale di Fibonacci rappresenta una "crescita discreta" mentre gli strumenti che fornisce il calcolo infinitesimale ci permettono di studiare la sua versione continua e le proprietà limite.

La psicoacustica ha da tempo chiarito le dinamiche che permettono all'uomo di comprendere da dove ha origine il suono che sta ascoltando, mediante differenze di ampiezza e fase (distanza interaurale

²⁷ Werckmeister, A. (1691). *Musicalische Temperatur, oder deutlicher und warer mathematischer Unterricht wie man durch Anweisung des Monochordi ein Clavier, sonderlich die Orgel-Wercke, Positive, Regale, Spinetten, und dergleichen wol temperirt stimmen könne* [Temperamento musicale, o chiara e vera istruzione matematica su come accordare bene un clavicembalo, specialmente organi, positivi, regali, spinette e simili, con l'aiuto del monocordo]. Quedlinburg: T.P. Calvisius

²⁸ La frequenza di Schroeder (f_s), definita come $f_s = 2000\sqrt{(T60/V)} \text{ Hz}$ (dove $T60$ è il tempo di riverberazione e V il volume della stanza in m^3), rappresenta il confine tra due regimi di comportamento acustico. "Al di sotto di questa frequenza, le onde stazionarie sono chiaramente identificabili e i modi normali della stanza sono percettivamente separabili. Al di sopra, il comportamento acustico diventa statistico e diffuso. Ciò è correlato alla capacità dell'orecchio umano di discriminare le variazioni di frequenza: nelle basse frequenze possiamo distinguere differenze dell'ordine di 1-2 Hz, mentre nelle alte frequenze sono necessarie variazioni dell'ordine di decine di Hz per percepire una differenza di altezza". Schroeder, M. R. (1962). Frequency-correlation functions of frequency responses in rooms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(12), 1819-1823.

ITD e livello interaurale **ILD**). La lunghezza d'onda delle basse frequenze può anche raggiungere diversi metri e sarà difficile per il nostro sistema uditivo individuarne la sorgente con certezza ma per i suoni acuti le cose si fanno più intriganti. Le onde più acute sono le più direttive (*lunghezza d'onda = velocità del suono/frequenza*).

Il cervello umano quando riceve il prodotto della trasduzione delle onde pressorie sul timpano, dopo aver attraversato il condotto uditivo e dopo essere state scalate d'impedenza dai tre ossicini (incudine, staffa e martello) e proposte alla finestra ovale della clochea e trasformate in impulsi elettrici dalle cellule ciliate tono-topiche nell'organo del Corti, mette in relazione il suono A ricevuto nell'istante t con lo stesso suono ricevuto nell'istante t_1 e così via. Se immaginiamo una sorgente sonora molto direttiva sulla destra, di fronte a noi, ciò che accade è che l'onda raggiunge l'orecchio destro seguendo una retta e quello sinistro con la retta simile sommata ad un arcoseno. Si precisa che ciò è in regime teorico e senza considerare riflessioni sonore di alcun tipo e trascurando il decadimento dell'ampiezza del suono che oltre a seguire la legge dell'inverso del quadrato della distanza di Newton deve anche tener conto delle variazioni di pressione, densità del mezzo di propagazione e temperatura. Alle nostre orecchie la sorgente giunge pertanto traslata nel tempo in base alla posizione ed il cervello che è un ottimo auto-correlatore²⁹, esegue un confronto rapidissimo tra i segnali.

I grafici seguenti mostrano lo spettro di frequenza in scala logaritmica da 20Hz a 20kHz, corrispondente al range udibile dell'orecchio umano. Il comb filter³⁰ produce notch³¹ periodici la cui spaziatura è determinata dal ritardo selezionato. Ogni notch è una perdita di ampiezza del segnale che è oltre 60dB (un milione di volte in meno). Il bambino crescendo impara a gestire il proprio sistema uditivo che ricordiamo è attivo ventiquattrore su ventiquattro (se sentiamo un rumore ci destiamo di colpo proprio grazie al perenne stato di “veglia” del sistema uditivo), ed ogni essere umano sviluppa nel corso della sua vita un costante adattamento della funzione di trasferimento relativa alla testa (Head-Related Transfer Function, HRTF³²). Questo continuo processo di apprendimento consente di memorizzare le attenuazioni spettrali che sono specifiche per differenti posizioni spaziali e che variano con la crescita. La localizzazione sul piano azimutale avviene proprio in questo modo e con

²⁹ Un sistema autocorrelante permette di analizzare ogni singola variazione di un segnale al suo ingresso con lo stesso segnale traslato nel tempo t_1, t_2, t_3, t_n

³⁰ filtro a pettine per la sua caratteristica forma particolare a mo' di denti di pettine in un grafico ampiezza - frequenza

³¹ Un filtro notch crea una caduta dell'ampiezza con un fattore di merito basso di oltre un milione di volte rispetto al segnale originale (-60dB)

³² Lord Rayleigh (1842-1919) fu il primo a studiare questo fenomeno teorizzando la Interaural Time Difference (ITD) e la Interaural Level Difference (ILD), ma il termine HRTF fu coniato nel 1970 presso i laboratori AT&T Bell da E.A.G. Shaw e R. Teranishi. Le HRTF sono uniche per ogni individuo a causa delle differenze anatomiche e sono fondamentali per la percezione spaziale del suono e la localizzazione delle sorgenti sonore

l'intervento come filtro passa basso del padiglione uditivo che attenua frequenze acute ed ampiezza del suono consentendo la localizzazione dei suoni dietro la testa.³³.

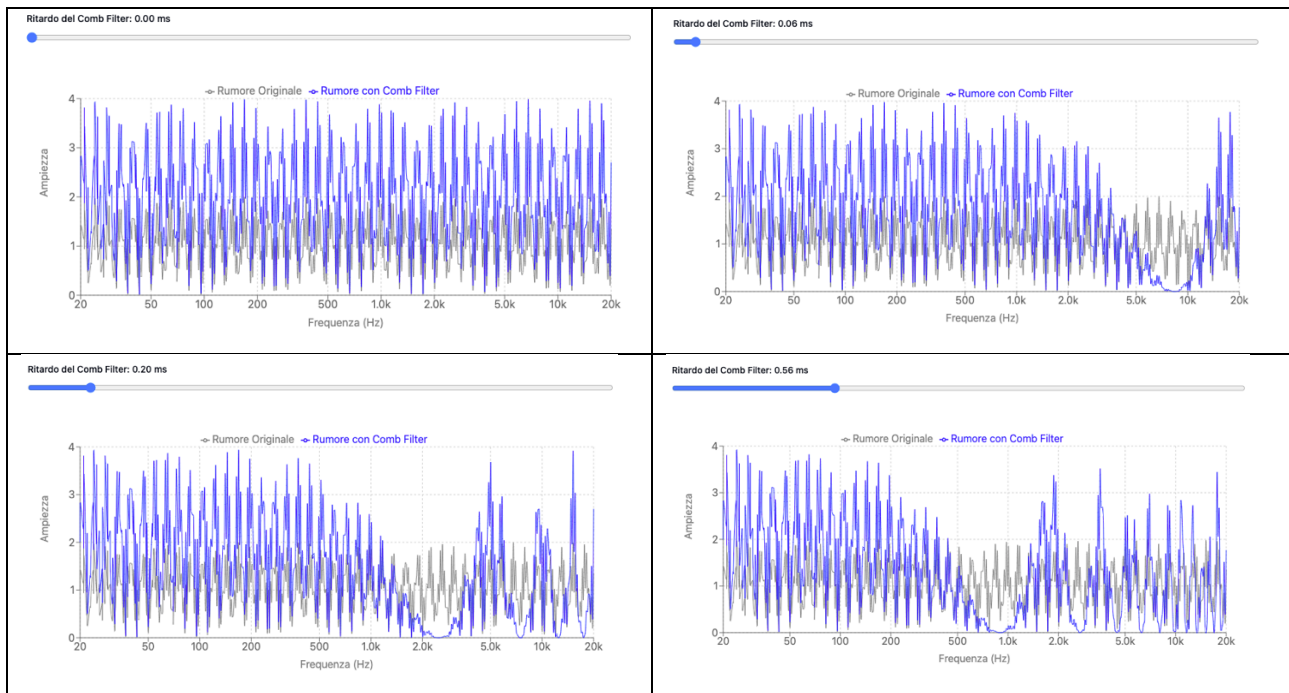


Figura 24: Rappresentazione delle attenuazioni spettrali (notches) in funzione del tempo. Il grafico mostra l'ampiezza del segnale (asse y) rispetto al tempo (asse x), evidenziando come i diversi notches si manifestino in istanti temporali differenti.

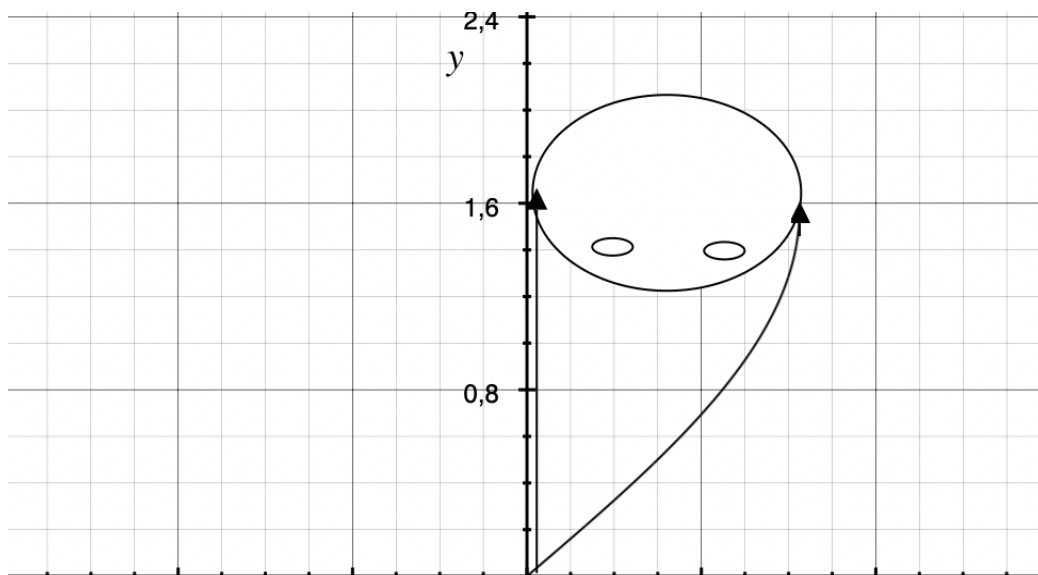
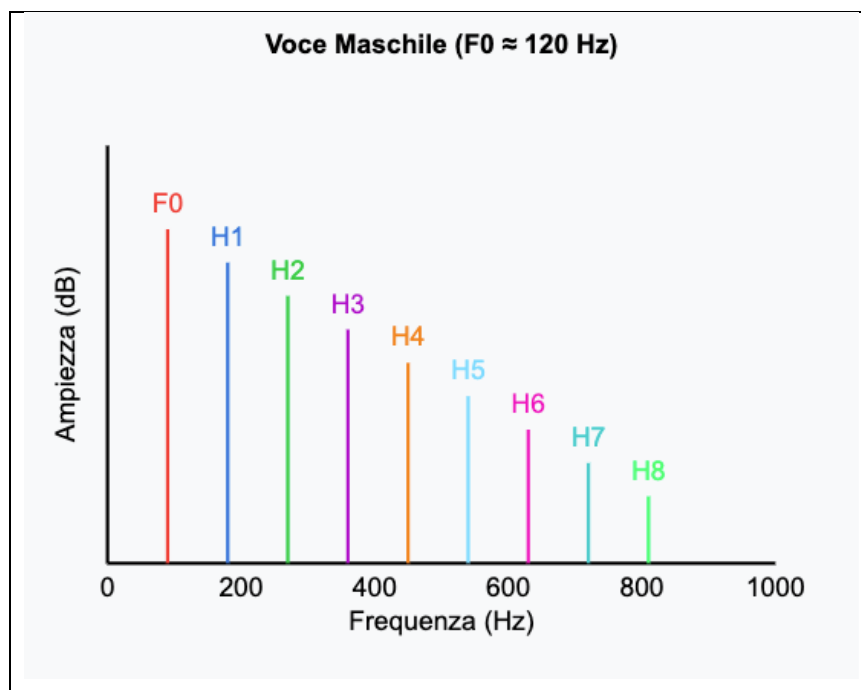


Figura 25: Visualizzazione dei tempi di arrivo differenziali del suono alle orecchie (ITD, Interaural Time Difference)

³³ Rayleigh, L. (1907). On our perception of sound direction. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 13(74), 214-232.

E ancora, se analizziamo lo spettro sonoro della voce umana noteremo che contiene gli stessi multipli armonici della fondamentale ed escludendo le componenti timbriche dettate dalle differenti cavità risonanti del corpo, dallo spessore delle corde vocali, dalla loro perfetta o meno adduzione, da caratteristiche e condizioni indotte (come quelle generate dai fumatori o da patologie particolari), possiamo dire con certezza che ogni suono che viene emesso dalla nostra voce contiene tutti gli armonici. Emblematico il caso di bambini appena nati che a causa dello sdoppiamento della colonna di fiato producevano sia la fondamentale che i suoni armonici. Alcune popolazioni dell'Asia centrale come i Tuvani (Russia meridionale), i mongoli, gli Altai ed i popoli della Chakassia (Russia), ed alcuni gruppi tibetani, dominano il canto armonico, così come i sardi col "canto a tenore", che seppur con qualche notevole differenza dovuta al concetto di "suono di somma" possiede similitudini nella produzione degli armonici nel canto. Tutte le popolazioni citate hanno sviluppato questa tecnica in modo indipendente.

Pitagora in quella fucina individuò matematicamente ciò che sentiamo anche nelle nostre voci, ecco due grafici uno della voce maschile con i relativi armonici e l'altro della voce femminile. Si noti che la fondamentale della voce maschile è un'ottava sotto in media e che gli armonici sono più ravvicinati tra loro.



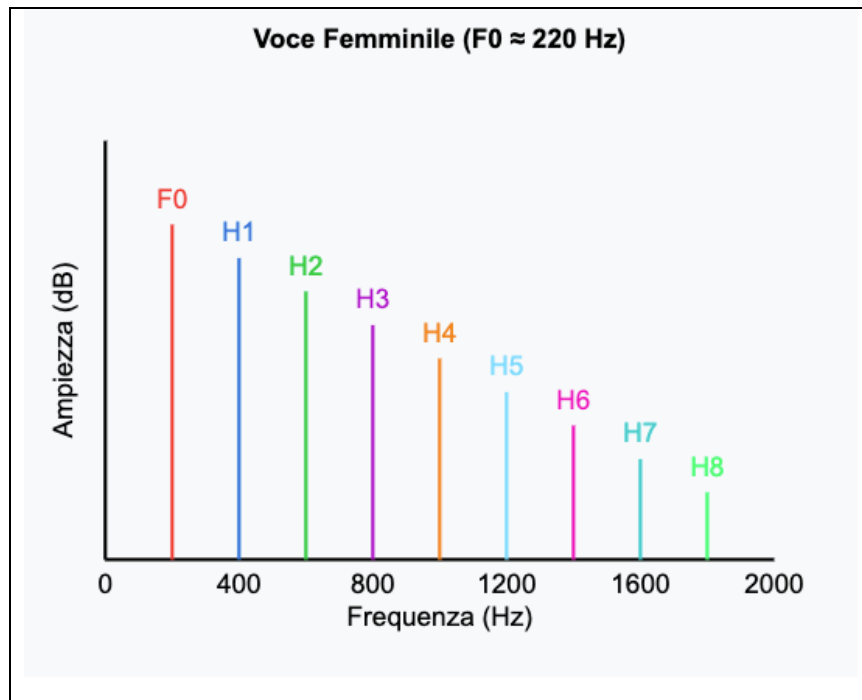


Figura 26: Spettro armonico della voce umana. Ampiezza in funzione della frequenza.

3.3 Influenze della musica sul pensiero matematico di Leibniz

La vita intellettuale di Leibniz si è intrecciata diverse volte negli anni con la musica. Durante il periodo *hannoverese*, Leibniz solidificò importanti relazioni con compositori come Agostino Steffani (1655-1728) e Attilio Ariosti (1666-1729), in quel periodo figure di spicco della musica italiana in Germania. In quegli anni, il coinvolgimento dello scienziato nella vita musicale si estese fino a Berlino; lì, infatti, contribuì all'organizzazione attiva di eventi concertistici. La formazione musicale di Leibniz presenta invece alcuni aspetti più problematici dal punto di vista storiografico. Le fonti biografiche non forniscono evidenze definitive riguardo a un'eventuale educazione musicale formale durante la giovinezza. È possibile ipotizzare un primo contatto con i fondamenti della disciplina durante il triennio (1655-1658) alla Nicolaischule di Leipzig, dove seguì un corso di studi umanistici. Tuttavia, l'ambiente domestico sembra aver giocato un ruolo più determinante: la biblioteca paterna, (dove il giovane Leibniz trascorreva lunghe ore di studio) potrebbe avergli consentito di avere a disposizione testi fondamentali come gli Armonici di Tolomeo o la Sezione del Canone di Euclide, del quale aveva certamente studiato gli Elementi³⁴.

³⁴ Leibniz, *initiation à sa philosophie*, Vrin, Paris 1975 ; W. KABITZ, *Die Philosophie der jungen Leibniz. Untersuchungen zur Entwicklungsgeschichte seines Systems*, C. Winter, Heidelberg 1909; V. MATHIEU, *Introduzione a Leibniz*, Laterza, Roma-Bari 1997, Y. BELAVAL, *Leibniz*, Vrin, Paris 1952

Il periodo universitario³⁵ segna un momento decisivo per lo sviluppo del suo pensiero musicale. L'intenso studio della matematica, filosofia, teologia e giurisprudenza, costituiranno la base del suo pensiero. In questi anni Leibniz legge due opere importantissime: "l'Harmonices Mundi" di Keplero e, la "Musurgia Universalis" di Athanasius Kircher³⁶. Influenzato dalle correnti neopitagoriche e neoplatoniche³⁷, egli sviluppa una concezione della musica legata alla matematica, e si concentra sulle relazioni numeriche come essenza stessa della realtà sonora.

Fondamentale il soggiorno parigino,³⁸ periodo durante il quale l'incontro con il grande scienziato olandese Christiaan Huygens³⁹ e Joseph Sauveur⁴⁰ determina un importante rinnovamento del suo approccio. Leibniz abbandona il metodo combinatorio di derivazione kircheriana per dedicarsi ad un'analisi più rigorosamente scientifica, fondata sulla teoria delle corde vibranti e sullo studio del temperamento musicale. Di grande importanza, infine, l'epistolario con Goldbach che rivela approfondimenti in direzione filosofica dove Leibniz sviluppa una teoria estetica che trascende la pura analisi matematica, elevando il discorso al piano gnoseologico-metafisico. Questo documenta come l'interesse per la musica non si sia limitato ad aspetti estetico-interpretativi ma lo abbia spinto a cercare ancora più in profondità.

Egli attraverso il concetto di "armonia prestabilita", solidificò questa idea di ordine matematico dell'universo e come Pitagora e Cartesio studiò i rapporti matematici nella musica. Egli considera la matematica linguaggio universale, la sua **characteristica universalis** era proprio un tentativo di creare un linguaggio universale basato sulla matematica, proprio come la musica. Inoltre, c'è un parallelo con il lavoro di Leibniz sulle serie infinite. Leibniz era affascinato dalle serie infinite e dal modo in cui potevano descrivere fenomeni complessi, proprio come la serie di Fourier descrive le onde sonore complesse. Inoltre, ricordiamo che Leibniz aveva ben chiaro che la musica era costituita da rapporti matematici e che difatti le comprendeva tutte. Un esercizio occulto di aritmetica dell'anima che non sa di contare. Un musicista conta sempre anche se non lo sa. Scomponi il tempo in semplici e composti e già questo accade con un calcolo perché il tempo composto si crea

³⁵ 1662-1666

³⁶ L'"Harmonices Mundi" di Kepler (1619) e la "Musurgia Universalis" di Kircher (1650) rappresentano due opere fondamentali che esplorano le relazioni tra musica, matematica e armonia cosmica. Kepler sviluppò la sua terza legge del moto planetario cercando armonie musicali nei movimenti dei pianeti, mentre Kircher presentò una vasta enciclopedia della conoscenza musicale del suo tempo, includendo studi sulla natura matematica del suono e sulla sua propagazione.

³⁷ dominanti nelle università di Leipzig e Jena

³⁸ 1672-1675

³⁹ 1629-1695

⁴⁰ 1653-1716

moltiplicando il tempo semplice per un coefficiente noto come coefficiente di ternarizzazione ($3/2$)⁴¹. Il tempo $2/4$ diventa $6/8$. Ed è solo il primo passo perché ogni musicista sa che mentre nei tempi semplici il numeratore indica il movimento nei tempi composti lo stesso numeratore indica le suddivisioni e cambia l'accento diventa da binario a ternario, come il tribraco⁴² ateniese. Leibniz vedeva anche l'universo come un sistema di elementi che operano in perfetta armonia, simile alla relazione tra le note musicali. Inoltre, nei suoi studi si interessò agli aspetti fisici della musica, studiando le vibrazioni e la propagazione del suono e dei rapporti matematici e geometrici del quale un ex militare francese della Guerra dei trent'anni noto come uno dei maggiori filosofi della storia, Renato Cartesio, si era già occupato.

Leibniz ha utilizzato spesso analogie musicali anche come metafore per spiegare le monadi: così come in una composizione musicale ogni nota ha il suo ruolo ma contribuisce all'armonia complessiva, ogni monade riflette l'universo intero dal suo punto di vista, unico. La musica era per lui uno strumento per comprendere e spiegare l'ordine e la natura della realtà. Anche se Leibniz non ha scritto trattati musicali ha avuto una fitta corrispondenza con molteplici importanti personaggi della sua epoca, tra cui Conrad Henfling⁴³.

Essa è particolarmente significativa perché Henfling era un matematico e teorico musicale che aveva sviluppato un sistema di temperamento musicale e nel loro scambio epistolare discutevano degli aspetti matematici della teoria musicale degli intervalli e la loro proporzione e dei problemi di temperamento e accordatura. Particolarmente significativo è il breve scritto "Drôle de Pensée"⁴⁴, si tratta di un breve scritto dove Leibniz sviluppa alcune riflessioni sulla natura del suono e sulla sua rappresentazione.

⁴¹ Questo processo matematico era ben noto ai teorici del Rinascimento, anche se la terminologia moderna di "coefficiente di ternarizzazione" è stata sviluppata successivamente nella teoria musicale

⁴² in greco antico: τριβράχυς, tríbrachys, composto da τρεῖς trêis, "tre", e βράχυς brachýs, "breve", ossia: "tre brevi", piede della metrica greca.

⁴³ Conrad Henfling (1648–1716 Ansbach, Germania), musicologo, musicista, matematico e avvocato fu un funzionario e consigliere privato alla corte del margravio di Ansbach, Germania. Inventò anche un nuovo tipo di tastiera per organo e clavicembalo, il cui design fu esteso da Paul von Janko nel suo brevetto del 1882. In una lettera datata 30 agosto 1706, scrisse a Gottfried Wilhelm Leibniz affrontando molti problemi di teoria musicale, esponendo calcoli dettagliati per un metodo di temperamento musicale, utilizzando l'algoritmo di Euclide nel suo ragionamento. Leibniz fece pubblicare l'opera di Henfling come "Epistola de novo suo systemate musico" in Miscellanea berolinensia, nel 1710.

⁴⁴ Nel suo "Drôle de pensée, che tocca un "nuovo genere di rappresentazioni", scritto a Parigi nel settembre 1675, Leibniz immagina di trasformare la capitale francese in un grande museo di conoscenza, arti e mestieri. Sogna di utilizzarlo come un gigantesco centro espositivo di conoscenze e invenzioni, un laboratorio per esperimenti, dove si terrebbero anche spettacoli, giochi e intrattenimento. Il testo fu scritto dopo che Leibniz ebbe assistito, nel mese di settembre, alla dimostrazione tra ambizione e spettacolo di Lanquer una macchina utilizzata per "camminare sull'acqua".

4. Intersezioni tra calcolo infinitesimale e musica

C'è un legame antichissimo tra musica e matematica e con la scoperta del calcolo infinitesimale nuove prospettive di analisi e comprensione si sono aperte. La musica ed il calcolo infinitesimale si intersecano in diversi livelli e mostrano quanto sia profondo questo legame in una condivisione di domini concettuali e pratici.

Le serie di Fourier rappresentano uno dei ponti più significativi tra calcolo infinitesimale e musica e Leibniz ne fu, anche se in modo differente, il precursore. Joseph Fourier dimostrò che qualsiasi funzione periodica può essere scomposta in una somma infinita di funzioni sinusoidali semplici. Questo ha rivoluzionato totalmente la nostra comprensione del timbro musicale perché con l'analisi di Fourier possiamo scomporre il suono di qualsiasi strumento musicale nei suoi componenti armonici fondamentali e mediante la rappresentazione matematica del timbro ha fornito le basi per la sintesi sonora moderna.

Una vera rivoluzione è stata la scoperta delle parziali, si pensi che con l'analisi delle parziali un bravo foniatra può già capire se c'è qualche problema alle corde vocali semplicemente con una analisi spettrale, inoltre si è spiegato così come strumenti, pur suonando la stessa nota, abbiano timbri diversi. L'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive la propagazione del suono nello spazio e nello stesso tempo ci consente di comprendere e soprattutto prevedere (e quindi anche attivare risintesi del suono), il comportamento acustico. Se pensiamo alle sale da concerto, ad esempio, non può non venirci in mente il concetto di limite, che è fondamentale per il calcolo infinitesimale e che trova paralleli con i glissandi, la microtonalità ed il morphing, ovvero le transizioni continue tra i suoni.

Altro imponente apporto all'elaborazione lo dobbiamo al concetto di integrazione. L'integrazione, è una operazione fondamentale del calcolo infinitesimale, che trova numerose applicazioni nella sintesi additiva che appunto utilizza l'integrazione di forme d'onda elementari, nel determinare l'energia contenuta in un segnale sonoro e, infine, le trasformate integrali sono alla base dell'elaborazione digitale dei segnali audio di ogni tipo permettendo così alle intersezioni tra calcolo infinitesimale e musica di donare nuova vita nell'era digitale, anche mediante lli algoritmi di compressione audio si (anche essi si basano su principi del calcolo infinitesimale), alla sintesi per modelli fisici utilizza equazioni differenziali per simulare strumenti reali (con grandi successi anche commerciali tipo i sintetizzatori della Korg come Wavestation etc).

Non dimentichiamo l'impatto per la composizione elettroacustica: il calcolo infinitesimale ha influenzato profondamente la composizione musicale contemporanea, ad esempio, nella musica "spettrale" che utilizza l'analisi di Fourier come base per la composizione, in quella algoritmica che

sfrutta modelli matematici derivati dal calcolo e anche nella sintesi “granulare”, tecnica di sintesi che si basa su principi di integrazione continua.

Oggi vi è una continua evoluzione ed assistiamo all’ intelligenza generativa che sta sviluppando nuovi modelli matematici per la sintesi sonora e addirittura per l’intera produzione completa anche di voce umana ri-sintetizzata e a tratti indistinguibile da quella reale per poi estendersi alla ricerca in acustica virtuale che utilizza sempre più sofisticati modelli differenziali anche per controllare da remoto venue⁴⁵ di grandi dimensioni, e non dimentichiamo qualcosa che ogni musicista ha sul tavolo, la scheda audio a bassa latenza. Infatti, le nuove interfacce musicali sfruttano principi di calcolo in tempo reale proprio con i driver ottimizzati da miliardi di queste operazioni.

Il calcolo infinitesimale ha fornito strumenti matematici fondamentali per comprendere, analizzare e manipolare il suono musicale in ogni minima sfumatura permettendo anche di manipolare l’intonazione, il tempo ed il timbro dell’esecuzione perfino di una performance cantata in tempo reale.

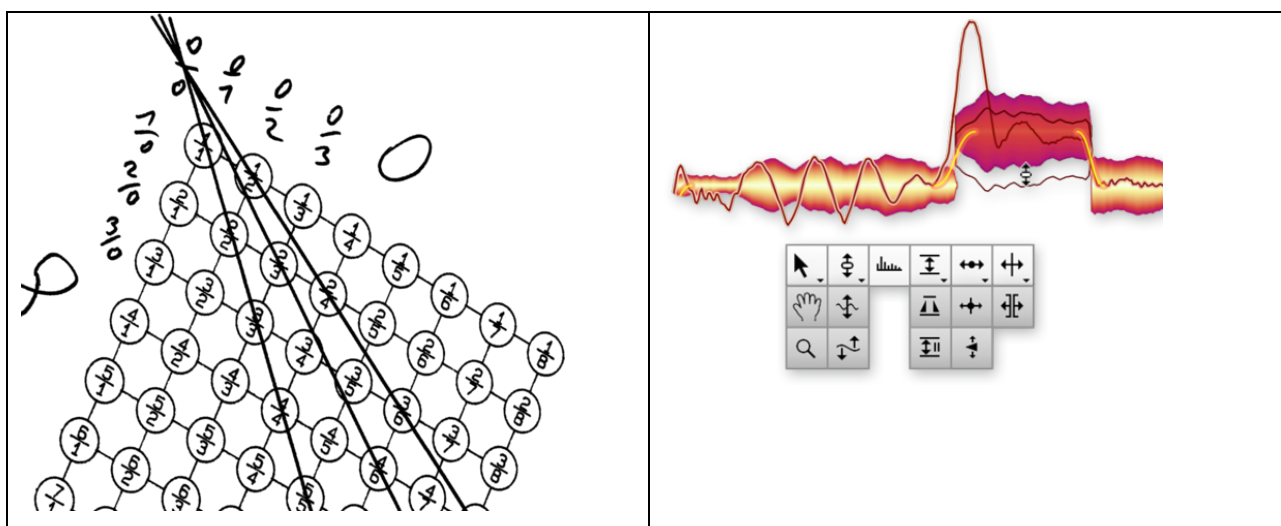


Figura 27: dal sito ufficiale del software Melodyne © prodotto da Celemony™ che con complessi calcoli permette la modifica di numerosi parametri relativi all'intonazione vocale e strumentale

⁴⁵ Luogo per grandi eventi. Smith, J., Johnson, K., & Williams, T. (2020). Event management in academic settings. Academic Press

4.1 Analogie strutturali tra calcolo e armonia musicale

Il moto circolare che genera una senoide è strettamente connesso al calcolo infinitesimale, di cui Leibniz fu uno dei padri. Il passaggio dal discreto (i rapporti numerici pitagorici) al continuo (le onde sinusoidali) è centrale nel pensiero di Leibniz così come lo è la sua visione dell'universo come un sistema di monadi in perfetta armonia. La proiezione del moto circolare uniforme genera una funzione sinusoidale. Possiamo immaginare una persona su di un'altalena e sotto di sé il tempo che scorre rappresentato da un infinito foglio bianco. Ora immaginiamo una matita sotto l'altalena ed ecco la nostra senoide. E nella musica le note non possiamo considerarle monadi? Loro sono lì, sul pentagramma, non sanno per cosa esistono e non conoscono le note accanto e neanche cosa fanno. Eppure, come in una stanza dove il grande orologiaio ha attivato orologi differenti che continuano a segnare il tempo in modo indipendente ma in relazione tra loro senza che gli stessi orologi sappiano l'uno dell'altro. Questo grande ordine universale, governato da rapporti matematici trova profonda conferma nella matematica della realtà dove i rapporti discreti di Pitagora coesistono con le funzioni continue della teoria di Fourier.

Pitagora nel VI secolo a.C. ha stabilito tra i primi i rapporti tra matematica e musica, relativi agli intervalli di ottava, quinta, quarta etc. seguendo lo spettro armonico e nel rinascimento con Gioseffo Zarlino (1517-1590) è stata introdotto il concetto di "senario" utilizzando i primi sei numeri naturali come base dell'armonia.

È però Jean-Philippe Rameau⁴⁶ ad essere considerato il padre dell'armonia moderna occidentale. Nella sua opera "*Traité de l'harmonie*" (1722), pose le basi teoriche dell'armonia tonale. Fu Rameau a spiegare che gli accordi (l'insieme almeno di tre suoni) si formano sovrapponendo le note ad intervalli di terza.

La teoria era basata sui principi matematici della serie armonica. Oggi possiamo riassumerla così: abbiamo tre suoni che distano l'uno dall'altro di una variabile che può assumere solo due valori, o 4 semitoni (terza maggiore) o tre semitoni (terza minore). In questo caso avremo 4 combinazioni di accordi a tre voci ($2^2=4$). Se procediamo con questo sistema aggiungendo una ulteriore terza che può essere maggiore o minore le combinazioni di accordi passano ad otto ($2^3=8$). In questo modo si generano tutte le specie di settime ovvero degli accordi a quattro voci. Nella pagina seguente lo schema costruttivo mostra la serie completa fino a raggiungere di nuovo la fondamentale.

⁴⁶ 1683-1764

La sequenza: $2^2 2^3 2^4 2^5 2^6$ genera accordi di fino alla quindicesima (poi torna alla fondamentale dopo due ottave)

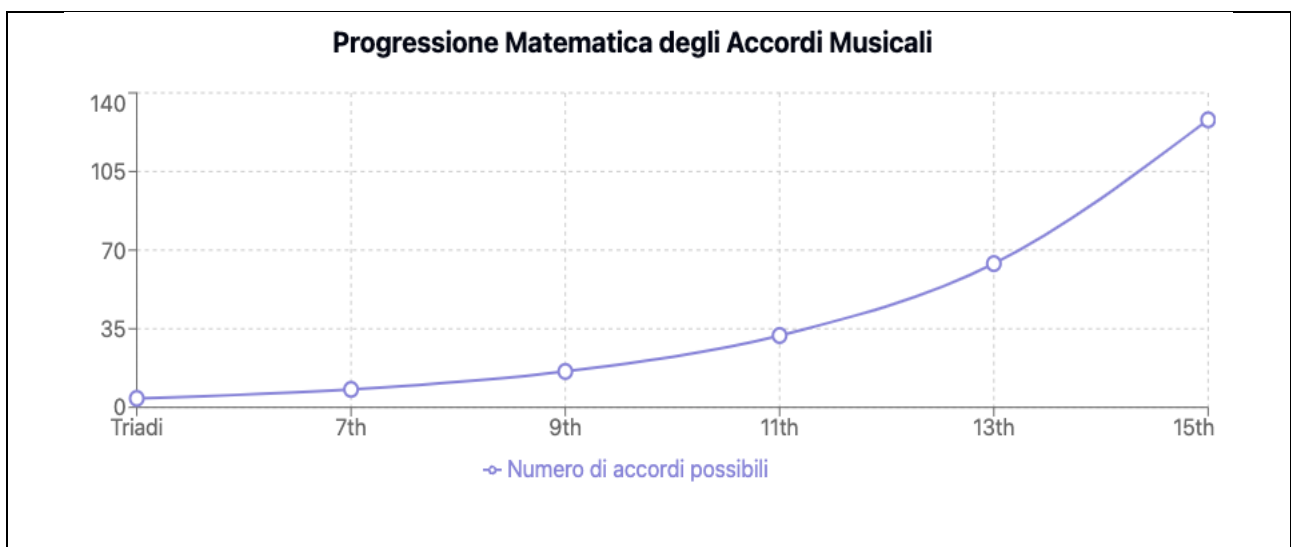
Accordi	Triadi	7 _a	9 _a	11 _a	13 _a	15 _a
Variabili	2 ²	2 ³	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶
Numero di accordi	4	8	16	32	64	128

Esempi con fondamentale Do (C) fino alla 9_a

C+			C				Cm				C dim			
7+		Maj7	Maj7		7		Maj7		7		7		dim7	
N.D.	#9	9	#9	9	9	b9	#9	9	9	b9	9	b9	b9	bb9

Questa progressione matematica mostra come la complessità armonica aumenta esponenzialmente e consente di calcolare tutte le possibili combinazioni di accordi disponibili. È molto importante nel jazz e nella musica contemporanea, nel jazz e ovunque servano accordi estesi (colonne sonore di film), ma anche grandi opere sinfoniche dell'Ottocento.

Quello che segue è il grafico esponenziale del numero degli accordi possibili.



Questo sistema è la base matematica per la teoria degli accordi estesi e serve a comprendere la complessità delle strutture armoniche nella musica. Esplora le possibilità armoniche disponibili. Il rapporto tra armonia e matematica, in sintesi, si manifesta in diversi modi: le frequenze delle note musicali seguono proporzioni matematiche precise, la costruzione degli accordi segue pattern numerici (es. intervalli di terza), le progressioni armoniche possono essere analizzate come sequenze

matematiche e la teoria dei gruppi matematici può essere applicata all'analisi delle trasformazioni armoniche. Nel '900, compositori come Arnold Schönberg⁴⁷ hanno ampliato questi concetti introducendo la dodecafonia sistema che usa principi e sequenze matematiche per organizzare le 12 note della scala cromatica. Ancora una volta il musicista fa di conto!

4.2 Il concetto di continuità nel calcolo e nella musica

Una funzione è continua quando non ha salti o interruzioni, "*Natura non facit saltus*" (la natura non fa salti) sosteneva Gottfried Wilhelm Leibniz. Questo principio filosofico lo troviamo nella sua opera "*Nouveaux essais sur l'entendement humain*" (Nuovi saggi sull'intelletto umano) (1704) gli ha ispirato il suo lavoro matematico e gli studi sul calcolo infinitesimale.

In realtà, il concetto ha origini ben più antiche. Già Aristotele, nel suo trattato "*Historia Animalium*" parlò dell'idea della "continuità" in natura. Non fu il solo perché anche il filosofo illuminista, naturalista e botanico Carlo Linneo in "*Philosophia Botanica*" (1751) riprende l'argomento.

Secondo questo principio la natura procede gradualmente senza cambiamenti improvvisi e questa idea è stata importante nella storia del pensiero scientifico e filosofico, perché ha influenzato anche le prime teorie dell'evoluzione. Leibniz sosteneva che la derivata misura il tasso di variazione istantaneo di una funzione, (in altre parole, quanto pende la tangente in un punto). Se pensiamo alle vibrazioni delle onde sonore, pensiamo a fenomeni continui ed i paralleli con la musica sono notevoli perché ad esempio, ampiezza e frequenza cambiano gradualmente e se pensiamo ai fenomeni legati alla corda vibrante non possiamo esimerci dal pensare alle funzioni continue ed alle equazioni d'onda. E, nella fisica acustica l'equazione d'onda è un eccellente esempio di continuità così come il glissando che non è altro che il passaggio tra due altezze. Le armoniche calcolate su una fondamentale sono una serie discreta invece ed il timbro è definito dalla presenza e dall'intensità relativa delle armoniche. Un esempio di funzione continua è semplicemente descrivibile come una matita che disegna su di un foglio senza sollevarsi da esso.

Possiamo descrivere la propagazione delle onde sonore con la formula nota come "*equazione delle onde*"

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 (\partial^2 u / \partial x^2)$$

⁴⁷ Considerato il padre della Dodecafonia che ha donato con il suo concetto di serie dodecafoniche "*pari diritti*" ad ogni nota musicale.

ed essa è una equazione differenziale alle derivate parziali. La soluzione è continua e derivabile $[u(x, t)]$ ed è emblematico come molti aspetti della teoria musicale (si pensi alle scale, agli armonici) siano invece fenomeni discreti. La musica oscilla costantemente tra elementi discreti e continui, creando la sua ricchezza espressiva e questo gioco continuo-discreto rappresenta una sua prerogativa fondamentale. Jean-Jacques Nattiez analizza la musica proprio come un “*sistema di comunicazione che oscilla tra elementi discreti e continui*”, e mette in evidenza come le notazioni musicali siano un gioco complesso tra “*strutture formali definite e sfumature espressive*”⁴⁸.

Aspetti continui	Aspetti discreti
Timbro - Il timbro ha sfumature quasi infinite - Transizioni graduali tra diverse qualità sonore Microtonalità - Alcune tradizioni musicali utilizzano intervalli più piccoli dei semitoni - Passaggi fluidi tra frequenze (Portamento) Tecnica Strumentale - Glissando - Vibrato - Sfumature espressive	Scale Musicali - Le scale sono intrinsecamente discrete, suddivise in intervalli specifici e predeterminati - Nella musica occidentale, l'ottava è divisa in 12 semitoni - Ogni nota ha una frequenza precisa Armonici - La serie degli armonici è una successione discreta di frequenze - Ogni armonico corrisponde a un multiplo intero della frequenza fondamentale - Si generano in rapporti numerici precisi (1:2, 1:3, 1:4, ecc.) Notazione Musicale - I pentagrammi rappresentano posizioni discrete delle note - Ogni nota occupa uno spazio o una riga specifici - I valori ritmici sono discreti (semibreve, minima, semiminima, ecc.) Strumenti Musicali - Molti strumenti producono note discrete - Tastiere, strumenti a fiato, strumenti a percussione hanno posizioni definite

⁴⁸ Nattiez, J.-J. (1990). Music and Discourse: Toward a Semiology of Music. Princeton University Press

4.3 La ricerca dell'infinito: convergenze matematiche e musicali

La visione filosofica e matematica del concetto di infinito nel pensiero di Leibniz la ritroviamo in un simbolo. Un simbolo semplice che però lo ha consegnato alla storia: il simbolo che sta per “summa”, somma, il simbolo dell’integrale. Possiamo vedere l’integrazione come l’inverso della derivazione, ma la relazione tra il simbolo $(\int)^{49}$ e il concetto di infinito ha implicitamente qualcosa di straordinario. Tutta la sua visione filosofica e matematica può essere racchiusa in questo simbolo e questa scelta non è casuale ma riflette un’idea fondamentale: l’infinito può essere compreso come una somma di infinitesimi. L’integrale è la somma, infatti, di infinite quantità infinitamente piccole.

Il processo di accumulazione continua è dinamico e non è per Leibniz un concetto astratto e statico. Se notiamo il simbolo, questa s allungata è come se si estendesse verticalmente e suggerisce anche visivamente l’idea di un processo che continui indefinitamente. La curva nel simbolo è una metafora e rappresenta il flusso continuo che caratterizza proprio il passaggio dal finito all’infinito.

Come non collegare questa concezione alla metafisica delle monadi, dove l’infinito è contenuto in ogni parte? Ogni monade contiene l’infinito e riflette l’intero universo da una particolare prospettiva. Il simbolo dell’integrale, nel calcolo infinitesimale di Leibniz è uno strumento che opera per “sommare” quantità continue. E ciò riflette il pensiero e la visione di Leibniz sul concetto di “continuità”: tra due punti vi sono infiniti altri punti e questa divisibilità infinita viene “catturata” dal processo di integrazione. È giunta invariata fino ai giorni nostri questa notazione dimostrando che il suo concetto di “somma infinita” ha anche una immensa validità visiva. Il simbolo è un ponte tra discreto e continuo, tra finito e infinito, per Leibniz questi sono temi centrali della sua filosofia⁵⁰. Se pensiamo a questa duplice natura del simbolo notiamo che tutto ciò è coerente con un’espressione visiva di principi metafisici.

Quindi se

$$\frac{dA}{dx} = y$$

Possiamo riscrivere l’equazione come

⁴⁹ La prima comparsa a stampa del simbolo di integrale fu in un articolo di Leibniz del 1686.

⁵⁰ Leibniz scrisse ad un amico: Nelle scoperte i simboli mostrano un vantaggio che è massimo quando per un attimo esprimono la natura esatta di una cosa, è come se dessero un’immagine visiva. A history of Mathematical Notation di F. Cajori, Open court 1929, vol.2 p 184.

$$A = \int y dx$$

Viene definito “integrale di y rispetto a x. A rappresenta l’area sottesa dalla curva di y in funzione di x. Effettivamente quello è il limite della somma delle aree di numerosi piccoli rettangoli ognuna delle quali è pari a $y\Delta x$.

È interessante notare come anche secondo Leibniz la musica, che ha una forma “finita” possa contenere l’infinito. Immaginiamo una melodia, essa si compone da una sequenza finita di note, ma ogni nota dista dalle successive infinite variazioni di frequenza. Poi i generi musicali, le culture, gli esecutori, i temperamenti, il sound, personalizzano ulteriormente con altri “infiniti” queste caratteristiche. E come un integrale la musica organizza infinite possibilità sonore in strutture comprensibili, finite.

Quando ascoltiamo un suono ciò che si percepisce è una somma continua (integrale) di variazioni pressorie che nascono da infinite vibrazioni infinitesimali dell’aria. L’integrale diventa quindi un simbolo semplice e diretto per descrivere queste microscopiche oscillazioni che giungono, sotto forma di suono, alle nostre orecchie.

Altro modo per tentare di “discretizzare” un continuo infinito di frequenze è la divisione dell’ottava in intervalli. E qui la visione di Leibniz è comune nello studio sul temperamento musicale perché la nostra mente integra infinite componenti sonore così come l’integrale rappresenta la somma delle infinite quantità infinitesimali.

Anche la pratica musicale è coinvolta perché quando un musicista esegue una nota e produce un suono con le sue infinite unicità, contiene altre infinite sfumature, da quelle dinamiche, ai respiri, cesure fino a quelli della manipolazione stilistica.

L’integrale è un ponte tra le infinite complessità del mondo dei suoni e quanto siamo capaci di organizzarne la percezione.

Un esempio perfetto di un enorme sistema di calcolo al nostro servizio.

5. La visione unificata di Leibniz

Leibniz è stato capace di immaginare tentativo ambizioso, forse uno dei più grandi in assoluto nella storia della filosofia: costruire un sistema metafisico omnicomprensivo che conciliasse la tradizione aristotelica con le scoperte scientifiche moderne. Come abbiamo già visto il concetto di monade è al centro di questa visione, sostanza semplice ed indivisibile ma fondamento ultimo della realtà.

Ogni monade riflette l'universo questo prevede la metafisica di Leibniz, ciò crea un'armonia prestabilita, motore di ogni interazione tra le sostanze.

Questa visione è talmente completa che può anche giustificare la presenza del male nel migliore dei mondi possibili come nella teodicea perché per Leibniz ogni elemento trova una giustificazione davanti al "tutto". Logica, matematica, fisica, con la sua teoria sulla dinamica sulla materia, tutto è uno e uno è tutto. Fondamentali per il filosofo tedesco il confronto con le idee e le ricerche di altri grandi contemporanei del suo tempo e non solo, ha il suo peso anche il rapporto con il meccanicismo cartesiano, l'influenza della tradizione scolastica.

5.1 La "caratteristica universale" e il suo rapporto con calcolo e musica

La "caratteristica universale" (*characteristica universalis*) si inserisce nella più ampia visione leibniziana di una scienza generale (*scientia generalis*) che potesse unificare tutti i campi del sapere umano. Leibniz crede che la matematica sia il linguaggio universale e la utilizza come modello per via dell'uso dei simboli che permettono di restringere ed annullare ogni fraintendimento tipico delle lingue. Operazioni complesse che si riducono a simboli secondo regole precise, così, la caratteristica universale secondo Leibniz permette di ridurre ogni ragionamento a un calcolo (*calculus ratiocinator*). E come la musica esprime relazioni matematiche attraverso il suono, così la caratteristica universale avrebbe dovuto esprimere relazioni logiche attraverso simboli.

Caratteristica universale, calcolo e musica sono strettamente connessi e tutto è sempre rilevabile nel pensiero leibniziano dove la ricerca di strutture universali sottostanti a fenomeni apparentemente diversi diventa fulcro di una ricerca autopoietica. La concezione della **characteristica universalis** è descritta principalmente nella "*Dissertatio de arte combinatoria*" (1666) e in diversi scritti sulla logica universale. In essi, Leibniz delinea il suo progetto di un "*alfabeto del pensiero umano*". Elabora il concetto di **scientia generalis** in vari scritti, tra cui "*De synthesis et analysis universali seu arte inveniendi et judicandi*" (1683-1685). Il parallelismo tra matematica e linguaggio universale lo ritroviamo negli scritti sulla logica matematica, in particolare nel "*De Arte Inveniendi*" (1676) mentre il *calculus ratiocinator* nei manoscritti sulla logica simbolica, (1679-1686).

5.2 L'armonia prestabilita come principio unificatore

L'armonia prestabilita leibniziana non solo offre una soluzione al problema del rapporto mente-corpo, ma permette di avere una chiave interpretativa di tutto l'universo metafisico del filosofo.

Nasce per spiegare la corrispondenza, perfetta, tra gli stati mentali e quelli corporei, senza che vi sia tra essi una reale interazione causale. Indipendenti ma perfettamente funzionanti grazie all'intermediazione divina. Ciò diventa ben presto fondamento dell'ordine cosmico superando il dualismo cartesiano. L'armonia prestabilita rappresenta la manifestazione più completa della razionalità divina, che ha scelto di creare il migliore dei mondi possibili secondo un ordine perfettamente armonioso (Teodicea 1710). Il concetto di Armonia prestabilita viene introdotto nel "*Systeme nouveau de la nature et de la communication des substances*" (1695).

5.3 Implicazioni metafisiche delle teorie matematiche e musicali di Leibniz

Possiamo collocare l'interesse di Gottfried Wilhelm Leibniz per la teoria musicale, nel periodo della sua formazione giovanile. Vi sono evidenti tracce nella già citata pubblicazione, nel 1666, "*Dissertatio de Arte Combinatoria*", un'opera di notevole rilevanza epistemologica, in quanto propone una metodologia universale, nella quale il ventenne filosofo tedesco, elabora un complesso apparato teoretico relativo alle combinazioni matematiche e all'analisi delle variazioni.

Originale, di elegante semplicità, l'opera affronta in un insieme di elementi, la sistematizzazione esaustiva delle permutazioni possibili e ciò che descrive è applicabile a molti campi dello scibile umano.



Figura 28: I versi trascritti da Kircher nella sua opera *Musurgia Universalis*

Il sistema abbraccia la logica sillogistica, la teoria predicativa, la geometria dei solidi, l'analisi dei linguaggi artificiali, ma anche la giurisprudenza, la retorica, e la teoria musicale.

Il gesuita già citato precedentemente Athanasius Kircher (1601-1680) è stato illuminante per Leibniz ed egli è l'unico studioso ad aver affrontato sistematicamente la teoria musicale⁵¹ e

⁵¹ in "*Musurgia Universalis*" (1650)

propone una teoretizzazione della composizione musicale fondata sul calcolo combinatorio ispirando chiaramente Leibniz. Descrive perfino le note dei versi degli animali. Vi è anche un carteggio che documenta tutto ciò datato 1670. Questa corrispondenza è una testimonianza palese e diretta che le teorizzazioni kircheriane sono state illuminanti per il giovane Leibniz.

Le riflessioni musicali, l'originalità metodologica e teoretica vanno pertanto collocate temporalmente nel periodo giovanile.

6. Influenza e eredità

Multiforme e profonda è stata l'influenza del filosofo tedesco sulla filosofia successiva estendendosi ben oltre i confini della sua epoca e giungendo fino a noi. In ambito filosofico, l'eredità leibniziana si è rivelata particolarmente significativa nella tradizione idealistica tedesca. Si pensi a Christian Wolff, a Kant, quest'ultimo, pur criticandolo, ha assorbito molto per giungere alla sua concezione della razionalità.

Il concetto di "monade" ha influenzato anche la filosofia romantica tedesca attraverso Herder e la sua concezione organicistica della natura.

Nella logica e matematica, il contributo di Leibniz si rivela sorprendentemente attuale ed ha influenzato figure come Frege, Russell, e le sue intuizioni sulla "*teoria delle probabilità*" hanno permesso lo studio di nuove ed inedite prospettive nella logica induttiva. Il concetto leibniziano di "*percezione inconscia*" anticipa diversi temi in vari campi di applicazione, dalla psicologia moderna, alla metafisica analitica, e, il suo principio di "*ragion sufficiente*" stimola ancora dibattiti e riflessioni nell'ambito della filosofia della scienza.

6.1 Impatto del calcolo leibniziano sulla matematica moderna

Una delle pietre miliari della matematica moderna e del suo sviluppo è proprio il calcolo leibniziano, e il suo metodo di "*integrazione per parti*" e la regola del "*prodotto per le derivate*". Essi sono diventati strumenti fondamentali dell'analisi matematica moderna. Leibniz ha influenzato approcci, creato simboli, e con la sua profonda sistematicità ha posto le basi per lo sviluppo successivo dell'analisi. Imponente anche il suo contributo alla teoria delle serie infinite e alle tecniche per la manipolazione delle serie, della comprensione dell'importanza dei criteri di convergenza fondamentale per lo studio e sviluppo non solo dell'analisi numerica a anche della logica dell'algebra astratta.

La concezione degli infinitesimi venne dapprima considerata problematica (dal punto di vista del rigore matematico), trovando successivamente una giustificazione moderna degli infinitesimi leibniziani rigorosa con Abraham Robinson nell'opera "Non-standard Analysis" del 1966.

6.2 Risonanze del pensiero di Leibniz nella teoria musicale successiva

Con l'avvento delle nuove tecnologie a disposizione dell'uomo come gli studi di Faraday, Lenz, Maxwell⁵², unite al genio artistico e alle perizie tecniche di alcuni pionieri come Leo Fender, le risonanze del calcolo infinitesimale sulla musica e le tecnologie musicali non potevano non passare per uno strumento che ha dominato l'intero Novecento: la chitarra elettrica.

I pickup elettromagnetici della chitarra elettrica, basati sulle leggi di Faraday sull'induzione elettromagnetica, trasducono le vibrazioni meccaniche delle corde in segnali elettrici, attraverso la variazione del campo magnetico indotto dalle corde di metallo si genera infatti, una corrente indotta. Questo processo può essere descritto matematicamente mediante equazioni differenziali.

Se si pensa ai grandi musicisti del 900 come Hendrix per la chitarra elettrica o anche ai Pink Floyd non si può non immaginare l'enorme studio che vi è nell'utilizzo, di ogni forma di manipolazione elettrica ed elettronica, che può essere vista come una estensione del pensiero di Leibniz. La manipolazione di frequenza, ampiezza, ritardo del segnale, ma anche con i semplici controlli di tono e volume su una chitarra elettrica, o con un pedale Wah Wah, o un distorsore (che ricordiamo matematicamente può essere riprodotto con una tangente iperbolica applicata al segnale in entrata), è parte di una forma di calcolo che le macchine ed il musicista realizzano in tempo reale in una connessione che mette tutto sul tavolo, matematica, espressione artistica, tecnica e tecnologia, riflettendo quella ricerca dell'armonia tra razionale (la parte ingegneristica di tutto ciò) e la parte sensibile che caratterizza ogni artista.

6.3 Leibniz come precursore dell'interdisciplinarietà moderna

Si sente spesso parlare di interdisciplinarietà; nelle scuole di ogni ordine e grado e per l'apprendimento si è compreso che è molto accattivante e performante relazionare e relazionarsi con più discipline. Leibniz lo aveva ben compreso e il suo contributo come precursore dell'interdisciplinarietà è elevatissimo. La sua visione di connessione profonda tra tutti i campi del sapere è notevole ed è sorprendente quanto sia ancora così moderna. Egli è riuscito a vedere connessione tra discipline lontanissime tra loro ed apparentemente senza nulla in comune. Ogni parte dell'universo riflette il tutto. È sempre questo il suo tratto distintivo. Matematica e metafisica⁵³ hanno aperto nuove strade a forme di pensiero inedite e interdisciplinari⁵⁴. Tutti i campi del sapere potevano essere unificati in un

⁵² Le equazioni matematiche dell'elettromagnetismo applicate alla musica sono trattate in "Musical Signal Processing" di Curtis Roads et al. (1997).

⁵³ Dal "Discorso di Metafisica" (1686), dove Leibniz esplicita la connessione tra matematica e metafisica.

⁵⁴ Documentato negli scritti sulla caratteristica universalis, in particolare nel "De Arte Combinatoria" (1666).

metodo comune. La logica e l'informatica sono stati influenzate tantissimo da questa visione. Si pensi alle reti, ai sistemi complessi, anche all'approccio olistico della conoscenza, con integrazioni di logica, matematica, teologia, metafisica, ed al loro sviluppo non sono forse esempi moderni contro la frammentazione del sapere?

7. Conclusioni

Leibniz ha cercato di riunificare le chiese senza riuscirci, ha cercato di evitare guerre senza riuscirci, ha cercato di costruire dighe senza portare a termine il progetto, ma nel 1714 riesce a coronare felicemente il suo progetto politico: portare sul trono d'Inghilterra il duca di Hannover, dando origine ad una dinastia che durerà fino alla regina Vittoria (1837). Ma non ebbe gratitudine per questo, anzi il re lo abbandonò. Due anni dopo una delle più grandi menti che siano esistite, muore in povertà, senza neanche un funerale onorevole. Non sono i potenti ad assicurare la fama dei grandi nella storia ma è un compito che tocca a noi, studiosi, ed ai saggi.

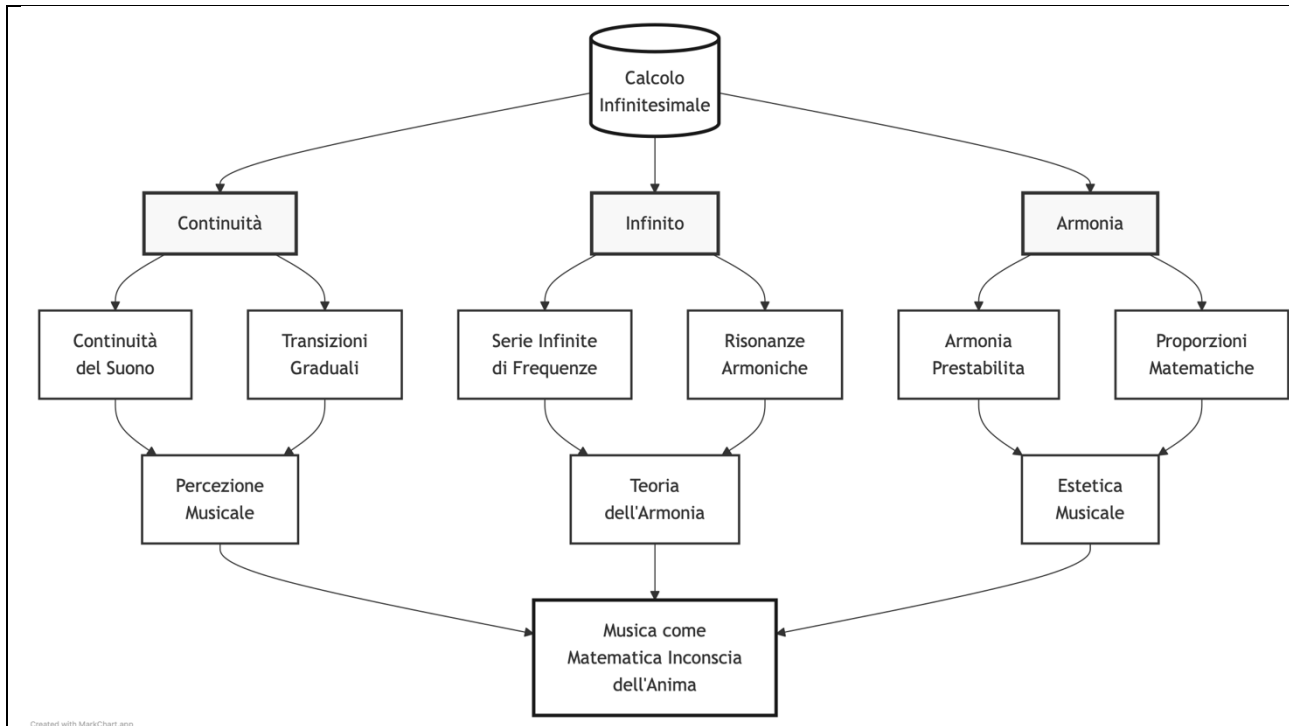
L'apporto alla civiltà ed alla storia umana di Leibniz è stato talmente imponente che molte cose non sarebbero esistite senza di lui. Questo lavoro di tesi, il computer con cui è stato scritto non sarebbe mai stato inventato, perché Leibniz fu il primo in occidente a comprendere e sviluppare il potenziale del sistema binario. In filosofia non avremmo avuto le monadi e non ci saremmo mai rapportati col concetto del "migliore dei mondi possibili", influenzando immensamente il pensiero occidentale definendo le verità di ragione e di fatto, le prime vere in tutti i mondi possibili e le seconde solo nel nostro e se ciò non ci appare così evidente è solo perché non possiamo "cogliere il punto di vista di Dio".

Nella logica non avremmo avuto, senza la sua "*characteristica universalis*", un linguaggio formale che ci permetta di esprimere tutti i concetti, anticipando la logica simbolica moderna, la ricerca e sviluppo dei linguaggi di programmazione. Il software con cui sto scrivendo questa tesi non sarebbe mai esistito! E non dimentichiamo che un giovane Leibniz si è presentato a Londra, nel cuore della conoscenza mondiale ed ha portato una calcolatrice, meccanica, più avanzata di quella di Pascal capace di eseguire tutte le quattro operazioni aritmetiche fondamentali e con memoria. Non ci sarebbe stata l'accademia delle scienze di Berlino di cui è stato fondatore, e non avrebbe ispirato gli illuministi ben cento anni prima, per le enciclopedie ed il sapere universale, nonostante Voltaire nel "*Candide*" si divertisse a prenderlo in giro (*il Dottor Pangloss*). Ed infine i simboli matematici sarebbero stati diversi, forse meno intuitivi e meno immediati delle derivate e degli integrali.

Ed è notevole il suo impatto nella musica dove ha ben compreso, ispirato dagli studi degli altri grandi scienziati del passato, il legame tra musica e matematica. Egli ha sviluppato alcune teorie

sull'armonia musicale, vista come l'armonia prestabilita dell'universo". Ed è stato tra i primi ad intuire quello che oggi studiamo nelle neuroscienze applicate alla musica, ovvero che il piacere che proviamo nell'ascoltare la musica deriva dal fatto che il nostro cervello percepisce in modo inconscio i rapporti matematici tra i suoni. Oggi diremo di tutte le matematiche.

7.1 Sintesi delle connessioni tra calcolo infinitesimale e musica in Leibniz



Le interessanti connessioni che Leibniz tra musica e calcolo infinitesimale partono da una frase del grande filosofo e matematico tedesco e che riguardano la sua concezione di musica. Egli, infatti, la descrive come: "*exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi*"⁵⁵. Questa definizione è illuminante e permette di comprendere che Leibniz vede nella musica una manifestazione dei rapporti matematici che governano l'universo.

È l'armonia a riflettere l'ordine matematico del cosmo con proporzioni e rapporti numerici ed il calcolo infinitesimale, studiando le continue variazioni fornisce più di uno strumento per comprendere moltissimi aspetti della musica uno fra tutti le transizioni armoniche, le interazioni tra i differenti timbri che compongono un'opera disposti nel manto frequenziale. Secondo Leibniz finanche la percezione opera attraverso micro-percezioni che non sono evidenti nella coscienza di ognuno di noi ma che contribuiscono all'esperienza complessiva.

⁵⁵ un esercizio nascosto di aritmetica in cui l'anima non sa di star contando. Da una lettera che scrisse a Christian Goldbach, datata 17 aprile 1712.

Ciò è rilevabile, ad esempio, quando un brano cambia tonalità, o quando vi sono modulazioni e sottili variazioni modali e tonali che fanno parte dell'armonia. Infine, il processo di integrazione che unifica gli infinitesimi in un tutto rispecchiando come le singole note si combinino in melodie ed accordi. È questa potente analogia tra integrazione e matematica dove gli elementi discreti si uniscono in un continuo armonico. Tutto ciò si inserisce nella metafisica Leibniziana relativa all'armonia prestabilita e riflette una profonda visione della fusione tra calcolo, musica, metafisica, arte dove il calcolo infinitesimale diventa strumento per comprendere l'armonia cosmica nella musica.

L'influenza allo sviluppo della teoria musicale, tra filosofia e matematica ha unito ambiti del sapere solo apparentemente distanti regalandoci oggi intense sfumature e conoscenze dettagliate di ogni struttura, forma ed universo musicale. La musica è la matematica inconscia dell'anima.

Dopo Leibniz: Frege e Gödel

Il sogno di Leibniz era molto ambizioso, egli voleva creare un linguaggio universale per rappresentare ogni area del ragionamento umano. Per lui non era importante la complessità dell'idea, perché quale fosse la complessità del ragionamento essa si poteva scomporre in "idee semplici". Associava questa procedura alla scomposizione dei numeri in fattori primi.

In sintesi, una verità "meccanica" che eliminasse ogni "ambiguità" del linguaggio "naturale". Una delle discipline che ha fatto di questa metodologia la base per ogni sviluppo complesso futuro (giungendo a ciò a cui ci troviamo di fronte oggi con sistemi informatici avanzati basati su computer quantistici, e con lo sviluppo dell'intelligenza generativa), è l'informatica.

Dalla logica binaria alle porte logiche, OR, AND, XOR, XNOR, NOT non sono altro che evoluzioni di questo linguaggio. Ma tutto ciò non è accaduto immediatamente e Leibniz non lo ha visto.

Frege, circa due secoli dopo, ha raccolto l'eredità di Leibniz. Con l'opera *Begriffsschrift* (1879), Frege crea difatti il primo linguaggio formale completo per la logica matematica, introducendo la notazione per la "quantificazione" (*ogni* ed *esiste*). Definisce la differenza tra il concetto di "funzione" e quello di "argomento". Soprattutto attua una vera rivoluzione di pensiero, completando il lavoro di Leibniz, ovvero postula che ogni proposizione matematica può essere analizzata in termini logici. Se Leibniz era ambizioso, Frege lo era infinitamente di più. Il "logicismo" di Frege puntava a solidificare la matematica attraverso la logica. Ed è qui che nei primi decenni del 1900 si fa spazio.

Il progetto di Frege era ancora più ambizioso di quello di Leibniz: non solo voleva un linguaggio formale per il ragionamento, ma intendeva dimostrare che tutta la matematica poteva essere ridotta alla logica pura. Questo programma, noto come logicismo, rappresenta uno dei tentativi più

significativi di dare fondamenti sicuri alla matematica. Gödel⁵⁶, utilizzando gli strumenti proposti da Frege e poi in seguito perfezionati da Whitehead e Russel, dimostra il “teorema di incompletezza”. “Qualsiasi sistema formale abbastanza potente da contenere l'aritmetica elementare contiene proposizioni che non possono essere né dimostrate né confutate all'interno del sistema stesso”. Egli usando gli strumenti formali sviluppati di Frege dimostra proprio i limiti della formalizzazione. Utilizza, per farlo una tecnica basata sulla cosiddetta “aritmetizzazione”. Essa permette al sistema formale di “parlare di sé stesso”. Già Leibniz aveva teorizzato questo concetto in realtà era la sua visione del “linguaggio come specchio del pensiero”. Ciò che unisce i tre pensatore è la visione realista della matematica.

- Per Leibniz, le verità matematiche riflettono necessità logiche presenti nella mente di Dio.
- Per Frege, gli oggetti matematici sono entità oggettive, anche se astratte. Nasce il concetto di valore di verità e l'aritmetica, poteva, completamente derivare dalla logica pura e sviluppò una teoria sistematica del significato (distinguendo tra senso e riferimento).
- Gödel era un convinto platonista, credeva nell'esistenza oggettiva degli “*enti matematici*” e creò un ponte inaspettato tra sintassi e semantica. Il suo teorema non rappresenta il fallimento di Leibniz e Frege ma il suo compimento: “*abbiamo bisogno del formalismo per comprendere i limiti del formalismo stesso*”.

La natura profonda del ragionamento matematico, grazie ai tre scienziati, pone tuttavia altri quesiti come il rapporto tra linguaggio, pensiero e realtà matematica ed i quesiti relativi ai limiti sulle capacità di formalizzare il ragionamento e non ultima la certezza delle “verità matematiche”. Ed è attraverso questi quesiti che siamo riusciti a compiere notevoli passi avanti nei più disparati settori. Leibniz, Frege e Gödel sono uniti da un filo rosso che parte dalle fondamenta ed arriva a noi.

⁵⁶ Berto F. Logica da zero a Godel - Laterza

7.2 Riflessioni sull'attualità del pensiero leibniziano

Considero il pensiero di Gottfried Wilhelm Leibniz, immenso, per la sua visione multidisciplinare e per le sue straordinarie intuizioni. La sua visione sistemica, l'interconnessione, e l'aver immaginato l'universo come una serie di monadi ha aperto la strada ai concetti di sistemi complessi.

Anche le moderne teorie relative ad auto-organizzazione ricordano l'armonia prestabilita e le moderne teorie della complessità trovano in Leibniz un chiaro riferimento relativamente ad ogni elemento connesso con tutti gli altri. È particolarmente attuale anche l'approccio interdisciplinare nell'era dell'iperspecializzazione. Lui ha integrato filosofia, matematica, scienze naturali, offrendoci realmente un dialogo tra le diverse discipline.

Per non parlare della sua ricerca di una ricerca di un linguaggio universale (*characteristica universalis*) che anticipa le moderne questioni, in una visione più estesa, sulla comunicazione di qualsiasi forma interculturale. Ma l'attualità del suo pensiero trova il culmine nel calcolo combinatorio perché influenza ancora oggi lo sviluppo dell'informatica e dell'intelligenza artificiale.

Dal dialogo tra saperi alla logica e computazione (i suoi studi sul calcolo binario ha posto le basi per l'informatica moderna), dall'etica e politica (non è di secondo piano l'idea di "*calculemus*" come metodo di risoluzione delle controversie offre spunti per riflettere sulla razionalità nelle decisioni pubbliche), e la sua visione di un'armonia tra particolare e universale, l'idea di "*migliore dei mondi possibili*"⁵⁷, la sua concezione di giustizia come "*caritas sapientis*", hanno evidenti ripercussioni su tantissimi temi: dal rapporto tra identità locali e globalizzazione all'ottimizzazione nelle scelte sociali all'approccio equilibrato tra razionalità ed empatia. Dal punto di vista della metafisica e della scienza contemporanea le intuizioni di Leibniz trovano parallelismi interessanti nella scienza moderna come il principio di ragion sufficiente mantiene la sua rilevanza nel dibattito scientifico contemporaneo o il concetto di monade per l'interpretazione dei fenomeni legati alla fisica quantistica e la sua concezione dello spazio-tempo relazionale anticipa alcuni aspetti della teoria della relatività.

Estendendo il pensiero di Leibniz anche al dibattito ambientale possiamo trovare interessanti spunti di riflessione intorno al fatto che la sua visione dell'interconnessione universale supporta una concezione ecologica del mondo e l'idea di armonia tra natura e ragione suggerisce vie per un rapporto sostenibile con l'ambiente ed infine l'idea di armonia tra natura e ragione suggerisce vie per migliorare il rapporto con l'ambiente. Anche il dibattito intorno all'uso etico dell'intelligenza artificiale vede il pensiero di Leibniz molto attuale: razionalità, coscienza ed il concetto di

⁵⁷ Teodicea

"*calculemus*" può guidare lo sviluppo di sistemi di decisione automatizzata pertanto è centrale per lo sviluppo delle IA.

La visione integrata e multidimensionale della realtà che ci circonda e l'eredità intellettuale che ci ha lasciato Leibniz continua a fornirci strumenti utilizzabili tutt'ora.

7.3 Prospettive per future ricerche

Per comprendere le strutture ritmiche complesse, emiolie di livello avanzato, poliritmie stratificate, è possibile utilizzare nell'ottica di ricerche future, la teoria dei sistemi dinamici. Questa teoria utilizza in modo estensivo il calcolo differenziale, in particolare, grandi benefici possono essere ottenuti dallo studio delle equazioni differenziali non lineari, consentendo di far emergere patterns particolari, così come l'analisi di temperamenti musicali non ancora esplorati. Ovviamente non possiamo non citare tutto ciò che sta già avvenendo su larga scala ovvero l'uso dell'intelligenza artificiale per isolare parti di audio, manipolarlo, sostituirlo, identificando con certezza le diverse frequenze, formanti e timbriche oltre che linee esecutive all'interno di un brano musicale stereofonico. Già numerose applicazioni utilizzano il calcolo infinitesimale per lo stem splitter⁵⁸ ed altre tipologie di editing avanzato. Anche il calcolo frazionario può ancora essere applicato alla teoria e notazione musicale nuove accordature possono affacciarsi consentendo una divisione inedita degli intervalli che conosciamo.

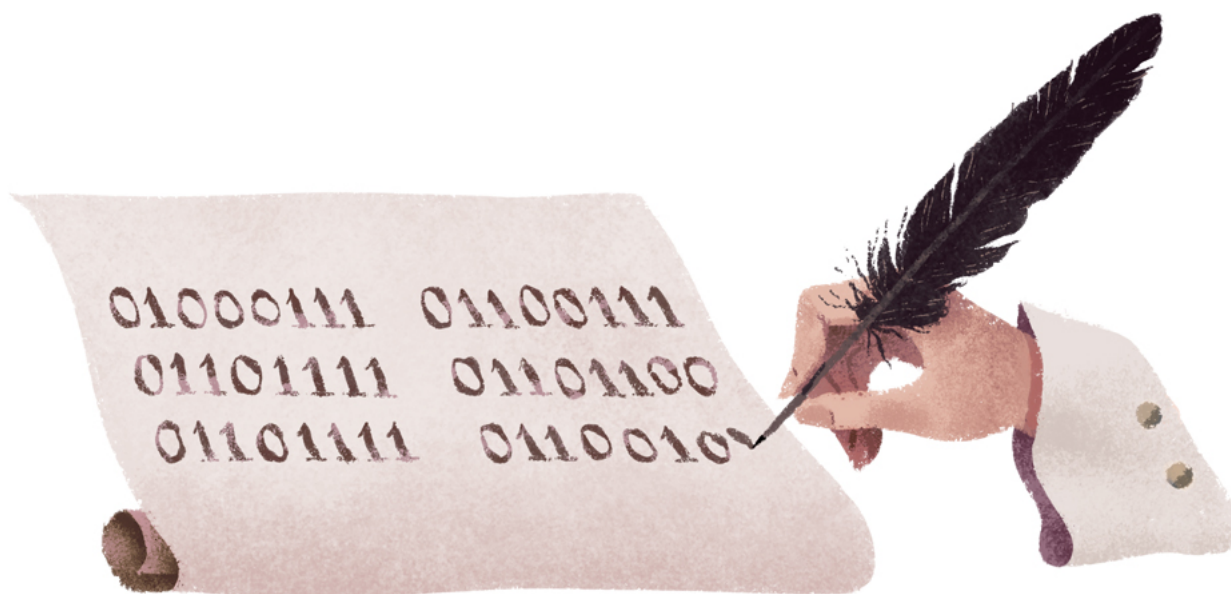
Essi forniscono nuovi strumenti per la composizione algoritmica, basati su funzioni continue e loro trasformazioni e intuizioni per nuove forme musicali che integrano strutture matematiche complesse. Teoria delle probabilità, calcolo stocastico, permettono già di studiare improvvisazioni musicali e strutture aleatorie e il loro studio non può che avere come risultato una maggiore comprensione dei meccanismi estetici, formali e funzionali. Sintesi additiva, sottrattiva, a modulazione di frequenza, a modulazione di ampiezza e di fase, sintesi granulare, sintesi a modulazione ad anello, ogni cosa può integrare e derivare, in ognuna di esse c'è una meravigliosa componente di calcolo infinitesimale. E, ogni cosa torna a Leibniz ed alla sua metodologia di ricerca interdisciplinare perché la musica è lingua, linguaggio e contiene tutto ed è una disciplina in cui l'unica cosa che non conviene affatto predisporre, sono i confini di ogni tipo.

Lo studio dei frattali e delle tipiche strutture, attraverso il calcolo infinitesimale può descrivere principi di auto-similarità musicali, suggerendo nuove vie e permettendo all'uomo di trovarsi in universi inediti della percezione.

⁵⁸ Procedura per isolare da un file stereo le tracce di percussioni, basso, armonia e voce solista

Appendici

Anche il motore di ricerca Google, il primo luglio del 2018, celebra il compleanno di Leibniz con questo “doodle”⁵⁹ che rappresenta il codice binario. All’interno di esso vi è anche una particolarità. Infatti, sembra che una mano, presumibilmente quella di Leibniz, stia scrivendo in binario Google (ASCII 8 bit).



Ecco la traduzione del testo a corredo:

“Il Doodle di oggi celebra il compleanno di Gottfried Wilhelm Leibniz, uno degli inventori e matematici più noti del suo tempo. Nato a Lipsia, in Germania, nel 1646, Leibniz è cresciuto in una famiglia di accademici. Non passò molto tempo prima che la sua sete di innovazione lo portasse a sviluppare strumenti matematici che sono la base di quelli utilizzati fino ad oggi. Leibniz ottenne un master in filosofia alla giovane età di 17 anni e una laurea in giurisprudenza a 20. Nel 1673 inventò la prima calcolatrice meccanica, chiamata "Step Reckoner", che poteva eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni. Si dice anche che Leibniz inventò il calcolo indipendentemente da Sir Isaac Newton mentre studiava a Parigi negli anni '70 del Seicento, un punto che è ancora fortemente dibattuto. Leibniz fu anche ispirato da opere di diversi generi nel corso del tempo, tra cui antichi filosofi di Grecia e Cina. Scrisse della "monade", un'idea metafisica di particelle essenziali che si opponeva agli atomi. Leibniz credeva che tutta l'esistenza fosse composta da particelle essenziali che erano sia biologiche che spirituali, impossibili da districare. Mentre la prima calcolatrice di Leibniz non utilizzava il sistema binario, inventò anche quello nel 1679. Il suo concetto

⁵⁹ Icona celebrativa nella Home page del famoso motore di ricerca

di scomporre le informazioni in 0 e 1, dettagliato nella sua Explication de l'Arithmétique Binaire (Spiegazione dell'aritmetica binaria) pubblicata nel 1703, è la base di tutta la programmazione informatica. Il Doodle di oggi annuisce a questo scrivendo "Google" in binario. Buon compleanno, Gottfried Wilhelm Leibniz!"

A. Glossario dei termini matematici e musicali

A

Ampiezza

- Matematica: Massima distanza dalla posizione di equilibrio in un'oscillazione
- Musica: Volume o intensità del suono

Armonica

- Matematica: Frequenza multipla intera della frequenza fondamentale
- Musica: Suono parziale che contribuisce al timbro di una nota

B

Battimento

- Matematica: Fenomeno di interferenza tra onde di frequenze leggermente diverse
- Musica: Pulsazione periodica dell'intensità sonora dovuta all'interferenza di due note vicine

C

Ciclo

- Matematica: Periodo completo di un'oscillazione
- Musica: Una vibrazione completa di un'onda sonora

Curva esponenziale

- Matematica: $y = a^x$, dove $a > 0$
- Musica: Relazione tra le frequenze delle ottave successive (raddoppio)

F

Fase

- Matematica: Posizione istantanea in un ciclo, misurata in radianti o gradi
- Musica: Sincronizzazione temporale tra onde sonore

Frequenza

- Matematica: Numero di cicli per unità di tempo (Hertz, Hz)
- Musica: Altezza percepita di una nota

Funzione periodica

- Matematica: $f(x + P) = f(x)$, dove P è il periodo
- Musica: Ripetizione regolare di un pattern sonoro

I

Intervallo

- Matematica: Rapporto tra due frequenze
- Musica: Distanza tra due note (es. terza, quinta, ottava)

L

Logaritmo

- Matematica: $\log_2(x) = y$ significa $2^y = x$
- Musica: Usato per descrivere le relazioni tra intervalli musicali

O

Onda sinusoidale

- Matematica: $y = A \sin(\omega t + \varphi)$
- Musica: Forma d'onda più semplice, suono puro

Ottava

- Matematica: Rapporto di frequenza 2:1
- Musica: Intervallo tra due note dove la frequenza raddoppia

P

Periodo

- Matematica: Tempo necessario per un ciclo completo
- Musica: Durata di una vibrazione completa

Progressione geometrica

- Matematica: Sequenza dove ogni termine è un multiplo costante del precedente
- Musica: Relazione tra le frequenze delle armoniche (1f, 2f, 3f, ...)

R

Rapporto

- Matematica: Relazione numerica tra due quantità
- Musica: Relazione tra frequenze che definisce un intervallo (es. 3:2 per la quinta)

Risonanza

- Matematica: Amplificazione di un'oscillazione alla frequenza naturale
- Musica: Rinforzo di certe frequenze in uno strumento

S

Serie armonica

- Matematica: Sequenza di frequenze multiple intere di una fondamentale
- Musica: Serie di suoni parziali che compongono un timbro

Serie di Fourier

- Matematica: Scomposizione di un'onda complessa in sinusoidi
- Musica: Analisi matematica del timbro di uno strumento

T

Temperamento

- Matematica: Sistema di accordatura basato su rapporti logaritmici
- Musica: Metodo per dividere l'ottava in intervalli

V

Vibrazione

- Matematica: Oscillazione periodica intorno a un punto di equilibrio
- Musica: Movimento che produce il suono

Note aggiuntive

1. Le relazioni matematiche in musica sono basate principalmente su:
 - Rapporti di frequenze
 - Progressioni geometriche
 - Funzioni periodiche
 - Serie armoniche
2. Il temperamento equabile moderno divide l'ottava in 12 semitoni uguali usando il rapporto $2^{1/12}$
3. La fisica delle onde e la teoria delle vibrazioni sono fondamentali per comprendere:
 - Il funzionamento degli strumenti musicali
 - La propagazione del suono
 - Il timbro e le armoniche
 - I fenomeni di risonanza

B. Cronologia della vita e delle opere di Leibniz

1666:

- "De Arte Combinatoria" (Dissertatio de arte combinatoria)

1670-1671:

- "Hypothesis Physica Nova" (Teoria del moto concreto)
- "Theoria Motus Abstracti"

1676:

- "Pacidius Philalethi" (dialogo sulla natura del movimento)

1684:

- "Nova Methodus pro Maximis et Minimis"
- "Meditationes de Cognitione, Veritate et Ideis"

1686:

- "Brevis Demonstratio Erroris Memorabilis Cartesii"
- "Discours de métaphysique" (scritto ma non pubblicato in vita)

1687:

- "De Geometria Recondita"

1690:

- "De primae philosophiae Emendatione"

1693:

- "Codex Juris Gentium Diplomaticus"

1695:

- "Système nouveau de la nature et de la communication des substances"
- "Specimen Dynamicum"

1697:

- "Novissima Sinica" (sulla Cina)

1698:

- "De Ipsa Natura"

1710:

- "Théodicée" (Essais de Théodicée)
- "Causa Dei Asserta"

1714:

- "Monadologia"
- "Principes de la Nature et de la Grâce"

Opere postume principali:

- "Nuovi saggi sull'intelletto umano" (scritto 1704, pubblicato 1765)
- "Protogaea" (scritto 1691-1693, pubblicato 1749)
- "Initia Rerum Mathematicarum Metaphysica" (pubblicato 1849)
- "De progressionem dyadica" (sulla matematica binaria, pubblicato 1879)

Collezioni maggiori postume:

- "Opera Omnia" (ed. Dutens, 6 volumi, 1768)
- "Mathematische Schriften" (ed. Gerhardt, 7 volumi, 1849-1863)
- "Die philosophischen Schriften" (ed. Gerhardt, 7 volumi, 1875-1890)
- "Sämtliche Schriften und Briefe" (ed. Accademia di Berlino, 1923 - in corso)

L'opera di Leibniz è molto vasta e diversi suoi scritti furono pubblicati sulle riviste scientifiche di quel periodo come gli "*Acta Eruditorum*" e il "*Journal des sçavans*". Nuovi manoscritti vengono ancora reperiti in giro per l'Europa e studiati, e questo elenco non è da considerarsi esaustivo.

C. Selezione di partiture musicali rilevanti per l'analisi

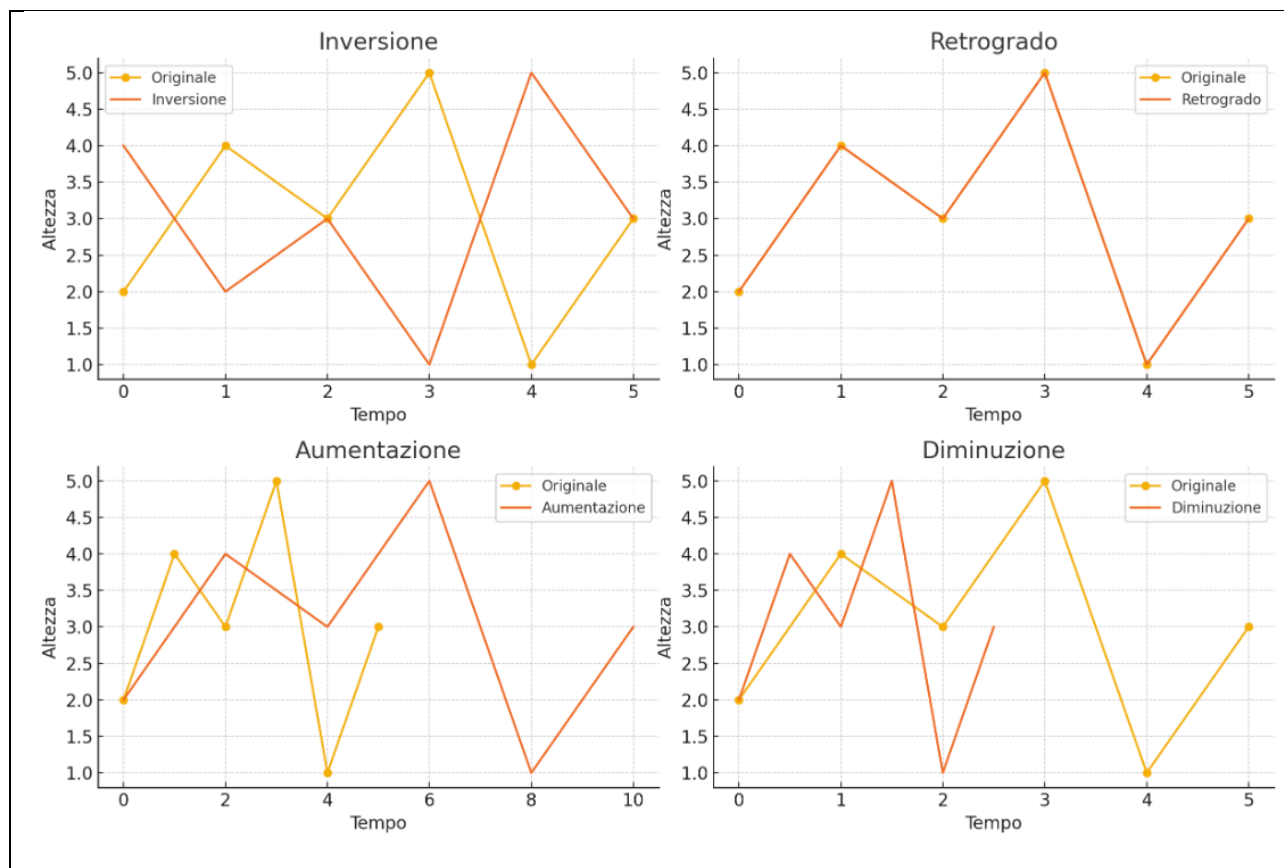
I compositori, esplicitamente o meno, affermandolo chiaramente o operando intimamente, utilizzano algoritmi compositivi che nascono da procedure matematiche.

Esaminiamo ad esempio Bach, che, come Leibniz era un tedesco, luterano e del periodo barocco. Alcuni musicologi suggeriscono paralleli tra il concetto di armonia prestabilita di Leibniz e l'approccio di Bach alla forma, al contrappunto ed all'arte della fuga.

Analizziamo gli elementi matematici nelle opere di Bach con alcuni esempi concreti:

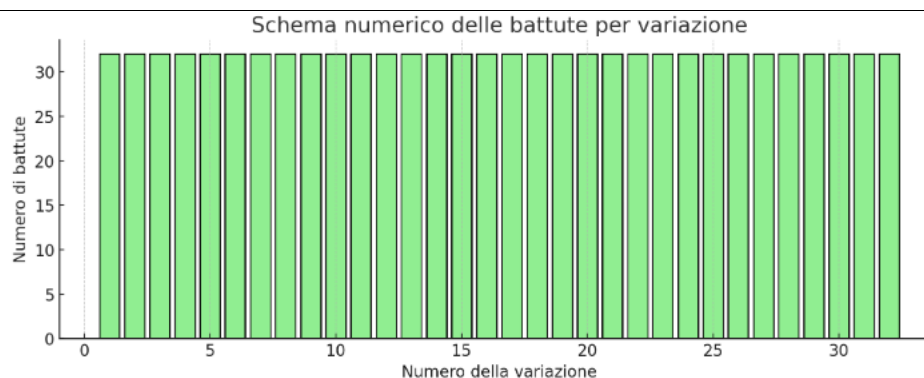
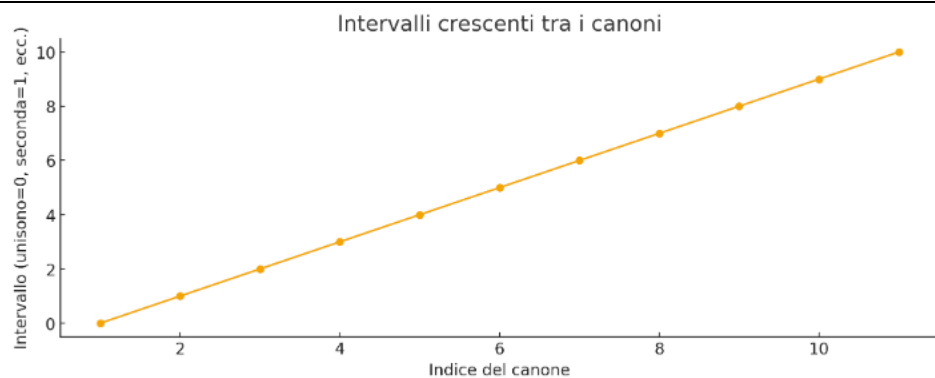
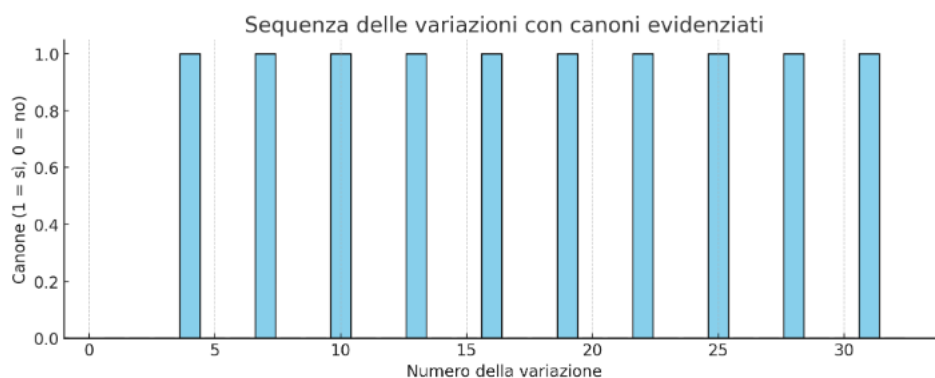
L'Arte della Fuga (Die Kunst der Fuge)

- Struttura basata sul numero 14 (somma numerologica di B+A+C+H)
- Contiene 14 fughe e 4 canoni
- Uso sistematico di trasformazioni geometriche come: inversione (melodia capovolta), retrogrado (melodia al contrario), aumentazione (note allungate proporzionalmente), diminuzione (note accorciate proporzionalmente).



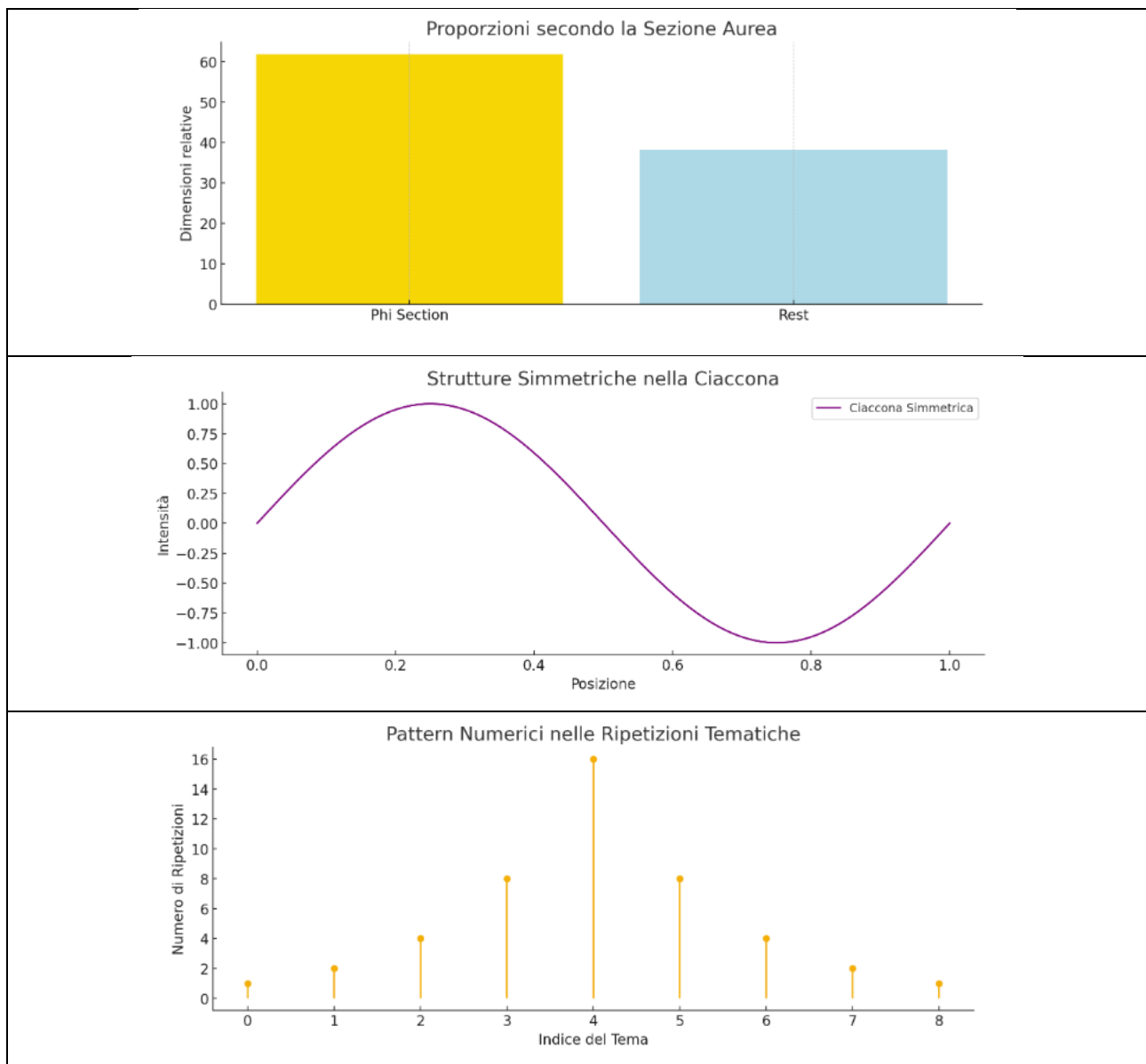
Le Variazioni Goldberg

- 30 variazioni più aria iniziale e finale (32 totali)
- Struttura basata sul numero 3:
 - Ogni terza variazione è un canone
 - I canoni procedono per intervalli crescenti (all'unisono, alla seconda, alla terza, ecc.)
- Schema numerico nella struttura delle battute (32)



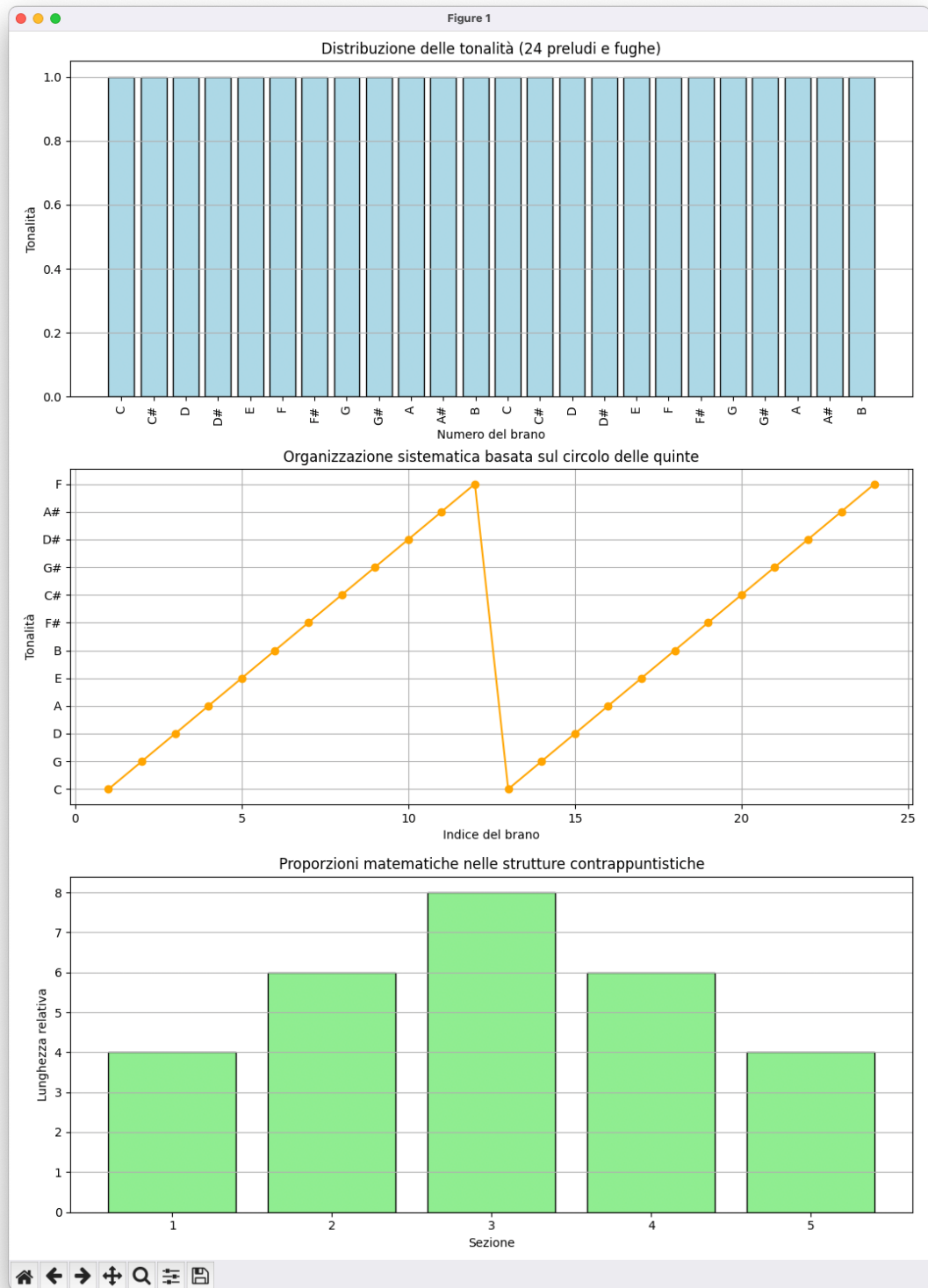
Le Partite per Violino Solo

- Uso della sezione aurea nelle proporzioni formali
- Strutture simmetriche nella Ciaccona della Partita n.2
- Pattern numerici nelle ripetizioni tematiche



Il Clavicembalo ben temperato

- 24 preludi e fughe (uno per ogni tonalità)
- Organizzazione sistematica (basata sul circolo delle quinte) e proporzioni matematiche (nelle strutture contrappuntistiche).



Bach utilizzava simmetrie nelle strutture melodiche, proporzioni auree nelle forme e anche patterns numerici nelle ripetizioni, con progressioni matematiche negli intervalli utilizzati e trasformazioni geometriche nei temi⁶⁰.

Essi non sono casuali ma riflettono la visione barocca della musica come espressione dell'ordine cosmico attraverso la matematica. Nella ricerca dell'infinitamente grande nell'infinitamente piccolo Bach utilizzava consapevolmente questi principi matematici come strumenti compositivi.

Oltre Bach sono numerosissimi i compositori che andrebbero citati. Ciò richiederebbe una serie di pubblicazioni ma tra i tanti è doveroso citare alcuni che hanno certamente utilizzato il calcolo e la matematica avanzata nelle loro composizioni e sono: Xenakis, architetto e compositore, collaboratore di Le Corbusier, che è stato un pioniere della musica concreta e algoritmica e che utilizzava modelli matematici come il calcolo delle probabilità, gli insiemi, integrando il tutto in un contesto ben più articolato, Karlheinz Stockhausen che ha utilizzato il calcolo e la matematica avanzata nelle sue opere di musica seriale. Infine, un omaggio ad un grande insegnante di composizione, Joseph Schillinger⁶¹ autore del “*Sistema Schillinger*” di Composizione Musicale, dove utilizza la geometria, ritmi proporzionali e progressioni.

```
*bach.py*

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# A cura di Raffaele Cardone

# 1. Distribuzione delle tonalità per preludi e fughe
tonalita = ["C", "C#", "D", "D#", "E", "F", "F#", "G", "G#", "A", "A#", "B"]
preludi_fughe = tonalita * 2 # 2 cicli di tonalità (maggiore e minore)
x_tonalita = range(1, 25) # 24 brani (12 tonalità maggiori e minori)

# 2. Circolo delle quinte: sequenza ordinata delle tonalità
circolo_quinte = ["C", "G", "D", "A", "E", "B", "F#", "C#", "G#", "D#", "A#", "F"]
circolo_quinte += circolo_quinte # Per coprire entrambe le modalità

# 3. Proporzioni matematiche (esempio immaginario di lunghezze delle sezioni)
lunghezze_sezioni = [4, 6, 8, 6, 4] # Simmetria numerica per un contrappunto ipotetico

# Creazione dei grafici
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 15))

# Grafico distribuzione tonalità
axs[0].bar(x_tonalita, [1] * len(preludi_fughe), color="lightblue", edgecolor="black")
axs[0].set_xticks(x_tonalita)
axs[0].set_xticklabels(preludi_fughe, rotation=90)
axs[0].set_title("Distribuzione delle tonalità (24 preludi e fughe)")
axs[0].set_xlabel("Numero del brano")
axs[0].set_ylabel("Tonalità")
axs[0].grid(axis="y")

# Grafico circolo delle quinte
axs[1].plot(range(1, len(circolo_quinte) + 1), circolo_quinte, marker="o", color="orange")
axs[1].set_title("Organizzazione sistematica basata sul circolo delle quinte")
axs[1].set_xlabel("Indice del brano")
axs[1].set_ylabel("Tonalità")
axs[1].grid()

# Grafico proporzioni matematiche
axs[2].bar(range(1, len(lunghezze_sezioni) + 1), lunghezze_sezioni, color="lightgreen", edgecolor="black")
axs[2].set_title("Proporzioni matematiche nelle strutture contrappuntistiche")
axs[2].set_xlabel("Sezione")
axs[2].set_ylabel("Lunghezza relativa")
axs[2].grid(axis="y")

plt.tight_layout()
```

Ln: 2 Col: 18

⁶⁰ Il linguaggio di programmazione utilizzato per realizzare i grafici sulle opere di Bach è Python, con le librerie dedicate al calcolo numerico numpy e alla creazione di grafici matplotlib.

⁶¹ Schillinger è stato il leggendario insegnante di musica di alcuni dei compositori più noti del XX secolo, tra cui George Gershwin e Glenn Miller.

Bibliografia

- Acheson, D. (2022). *Viaggio nel calcolo infinitesimale*. Oxford: Zanichelli.
- Maor, E. (2018). *Music by the Numbers*. Princeton: Princeton University Press.
- James, J. (1993). *The Music of the Spheres*. New York: Grove Press.
- Loy, G. (2011). *Musimathics* (Vol. 1 e 2). Cambridge, MA: MIT Press.
- Odifreddi, P. (2003). *Il diavolo in cattedra*. Giulio Einaudi.
- Colorni, E., & Mendolesi, L. (Ed.). (2023). *Il compromesso Leibniz*. Soveria Mannelli: Rubbettino.
- Lombardo, V., & Valle, A. (2024). *Audio e multimedia*. Santarcangelo di Romagna: Maggioli.
- Aston, A. (2005). *Harmonograph: A Visual Guide to the Mathematics of Music*. Bloomsbury.
- Rosati, T. (2023). *Suono elettronico*. Milano: Volontè & Company.
- Mugnai, M. (2001). *Introduzione alla filosofia di Leibniz*. Torino: Giulio Einaudi.
- Tarabella, L. (2014). *Musica informatica*. Santarcangelo di Romagna: Maggioli.
- Cartesio. (2008). *Compendium Musicae*. Bari: Stilo Editrice.
- Heller-Roazen, D. (2011). *Il quinto martello: Pitagora e la disarmonia del mondo*. Macerata: Quodlibet.
- Avena, A. (2012). *Teoria e armonia* (Vol. 1-4). Milano: Carisch.
- Heller, E. J. (2012). *Why You Hear What You Hear*. Princeton: Princeton University Press.
- Pierce, J. (1983). *The Science of Musical Sound*. New York: Scientific American Books.
- Proverbio, A. M. (2019). *Neuroscienze cognitive della musica*. Bologna: Zanichelli.
- Fronzi, G. (2021). *Percorsi musicali del Novecento*. Roma: Carocci.
- Schön, D. (2018). *Il cervello musicale*. Roma: Carocci.
- Schön, D., Akiva-Kabiri, R., & Vecchi, T. (2007). *Psicologia della musica*. Roma: Carocci.
- Dutens, L. (Ed.). (1768). *Gottfried Wilhelm Leibniz: Opera Omnia*. Geneva: Fratres de Tournes.
(Riferimento alla raccolta delle lettere di Leibniz, come quella a Goldbach)
- Helmholtz, H. (1863). *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik* [The Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music]. Braunschweig: Vieweg.
- Kepler, J. (1619). *Harmonices Mundi* [The Harmony of the World]. Linz: Johannes Plancus.
- Leibniz, G. W. (1765). *Nouveaux essais sur l'entendement humain* [New Essays on Human Understanding]. Amsterdam: J. Schreuder.
- Locke, J. (1690). *An Essay Concerning Human Understanding*. London: Thomas Basset.

- Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [The Mathematical Principles of Natural Philosophy]. London: Royal Society.
- Zarlino, G. (1558). *Le istituzioni harmoniche*. Venice: Francesco de Franceschi.
- Weber, M. (2017). *Sociologia della musica*. Milano: Candida Felici, Il saggiatore.